

## Gekoppelte Schwingungen

### AUFZEICHNUNG UND AUSWERTUNG DER SCHWINGUNGEN ZWEIER GLEICHER, GEKOPPELTER PENDEL.

- Aufzeichnung der gleichphasigen Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer  $T_+$ .
- Aufzeichnung der gegenphasigen Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer  $T_-$ .
- Aufzeichnung einer gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer  $T$  sowie der Schwebungsdauer  $T_\Delta$ .
- Vergleich der gemessenen Schwebungs- und Schwingungsdauer mit den aus den Eigenschwingungsdauern  $T_-$  und  $T_+$  berechneten Werten.
- Bestimmung der Federkonstanten der Koppelfeder.

UE1050600

01/24 CW/UD

### ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Bei der Schwingung zweier gekoppelter Pendel wird Schwingungsenergie zwischen beiden Pendeln hin und her übertragen. Sind beide Pendel gleich und werden ihre Schwingungen so angeregt, dass sich zu Anfang ein Pendel in Ruhelage befindet, während das andere maximal ausgelenkt ist, so geschieht die Energieübertragung sogar vollständig. D.h. jeweils ein Pendel kommt vollständig zur Ruhe, während das andere mit maximaler Amplitude schwingt. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels oder allgemeiner zwischen zwei Zeitpunkten, an denen das Pendel mit minimaler Amplitude schwingt, wird als Schwebungsdauer  $T_\Delta$  bezeichnet.

Die Schwingungen zweier gleicher, gekoppelter mathematischer Pendel lassen sich als Überlagerung zweier Eigenschwingungen beschreiben. Diese können beobachtet werden, wenn man die beiden Pendel zu

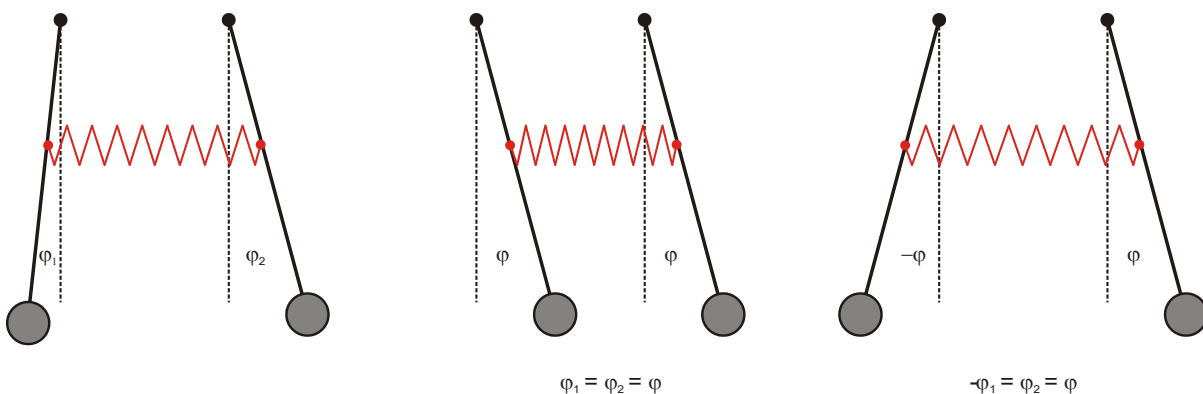
gleichphasigen oder zu gegenphasigen Schwingungen anregt. Im ersten Fall schwingen die Pendel ohne Einfluss der Kopplung mit der Frequenz der ungekoppelten Pendel, im zweiten Fall schwingen sie bei maximalem Einfluss der Kopplung mit größerer Eigenfrequenz. Alle anderen Schwingungen sind als Überlagerungen dieser beiden Eigenschwingungen darstellbar.

Die Bewegungsgleichungen der Pendel haben (für kleine Auslenkwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ) die Form:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$g$ : Fallbeschleunigung,  $L$ : Pendellänge,  $k$ : Kopplungskonstante

Fig. 1: Allgemeine (links), gleichphasige (Mitte) und gegenphasige Schwingung (rechts) zweier gekoppelter Pendel



Für die (zunächst willkürlich eingeführten) Hilfsgrößen  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  und  $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$  ergeben sich daraus die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Deren Lösungen

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{3}$$

mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \tag{4}$$

entsprechen den beschriebenen Eigenschwingungen bei gleich- oder gegenphasiger Anregung (es gilt  $\varphi_+ = 0$  bei gegenphasiger und  $\varphi_- = 0$  bei gleichphasiger Schwingung).

Die Auslenkungen der Pendel lassen sich aus der Summe bzw. der Differenz der beiden Hilfsgrößen berechnen und man erhält die Lösung

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei sind die Parameter  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$  und  $b_-$  zunächst beliebige Größen, die sich aus dem Schwingungszustand der beiden Pendel zum Zeitpunkt  $t = 0$  berechnen lassen.

Am leichtesten ist der folgende Fall zu interpretieren, der angeregt wird, wenn Pendel 1 zum Zeitpunkt 0 aus der Nulllage um den Winkel  $\varphi_0$  ausgelenkt und losgelassen wird, während Pendel 2 in Nulllage in Ruhe ist.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{6}$$

Nach mathematischer Umformung erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Dies entspricht einer Schwingung der beiden Pendel mit der gleichen Kreisfrequenz  $\omega$ , wobei ihre Amplituden mit der Kreisfrequenz  $\omega_\Delta$  moduliert werden. Man bezeichnet eine solche Modulation als Schwebung. Im vorliegenden Fall kann sogar von einer maximalen Schwebung gesprochen werden, weil die Amplitude als Minimalwert Null erreicht.

## GERÄTELISTE

- 2 Stabpendel mit Winkelaufnehmer @230 V 1000763 (U8404275-230)
- oder
- 2 Stabpendel mit Winkelaufnehmer @115 V 1000762 (U8404275-115)
- 1 Schraubenfeder 3,9 N/m 1002945 (U15027)
- 2 Tischklemmen 1002832 (U1326)
- 2 Stativstangen, 1000 mm 1002936 (U15004)
- 1 Stativstange, 470 mm 1002934 (U15002)
- 4 Universalniffen 1002830 (U13255)
- 2 Adapter BNC-Stecker / 4 mm Buchsen 1002750 (U11259)
- 2 Spannungssensoren 10 V 1021682 (UCMA-BT02)
- 1 Datenlogger
- 1 Software

Weitere Informationen zum digitalen Messen sind auf der Webseite des Experiments im 3B Webshop zu finden.

## AUFBAU

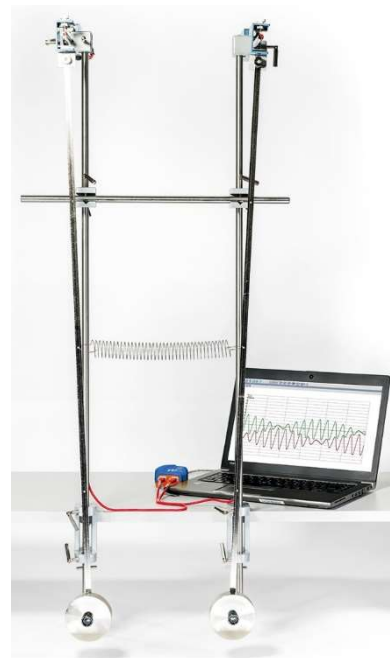


Fig. 2: Aufbau zur Aufzeichnung und Auswertung der Schwingungen zweier gleicher, gekoppelter Pendel

Der Aufbau ist in Fig. 2 dargestellt.

- Die 1000 mm langen Stativstangen im Abstand von ca. 15 cm mittels der Tischklemmen am Arbeitstisch befestigen.
- Kurze Stativstange waagrecht anbringen, um dem Aufbau mehr Stabilität zu verleihen.
- Winkelaufnehmer mit Hilfe der Universalniffen am oberen Ende der vertikalen Stativstangen befestigen.
- Pendelmassen am unteren Ende der Pendelstäbe befestigen.

- Pendelstäbe in die Winkelaufnehmer einhängen (für die Nadeln der Pendelaufhängung sind Kerben in den Stangen der Winkelaufnehmer vorgesehen).
- Schraubenfeder in die Löcher an den Pendelstäben einhängen, welche ca. 40 cm von der Aufhängung entfernt sind.
- Die Adapter BNC-Stecker / 4 mm Buchsen auf die Winkelaufnehmer stecken und Spannungssensoren anschließen.
- Spannungssensoren an den Datenlogger anschließen.
- Beide Winkelaufnehmer mit Hilfe der Steckernetzgeräte an das Stromnetz anschließen.

## DURCHFÜHRUNG

- Software starten und die Zeitverläufe der Spannungssignale beider Sensoren aufnehmen.
- 1. Aufzeichnung der gleichphasigen Schwingung**
    - Beide Pendel um den gleichen (kleinen) Winkel in gleicher Richtung auslenken und gleichzeitig loslassen.
  - 2. Aufzeichnung der gegenphasigen Schwingung**
    - Beide Pendel um den gleichen (kleinen) Winkel in entgegengesetzter Richtung auslenken und gleichzeitig loslassen.
  - 3. Aufzeichnung einer gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung**
    - Ggf. Anzahl der Messwerte erhöhen.
    - Einen Pendelstab auslenken, den anderen in der Nulllage festhalten und beide gleichzeitig loslassen.

## MESSBEISPIELE

### 1. Gleichphasige gekoppelte Schwingung

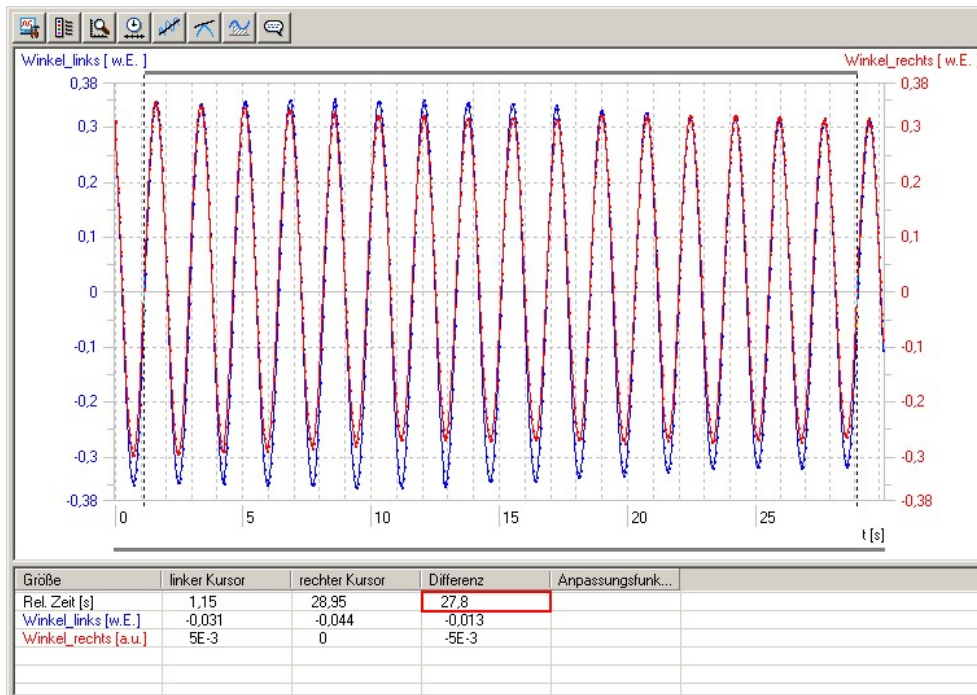


Fig. 3: Auslenkung-Zeit-Diagramm der gleichphasigen gekoppelten Schwingung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

## 2. Gegenphasige gekoppelte Schwingung

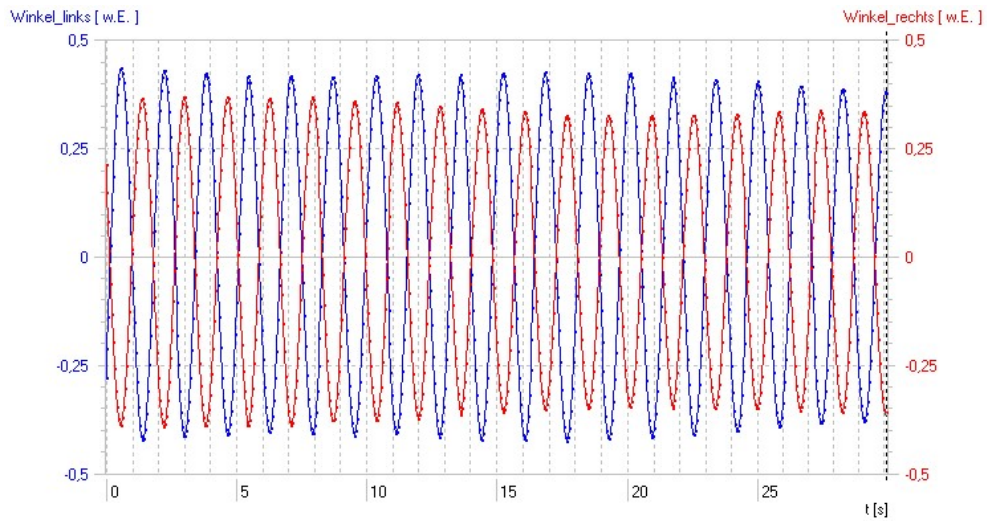


Fig. 4: Auslenkung-Zeit-Diagramm der gegenphasigen gekoppelten Schwingung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

## 3. Gekoppelte Schwingung mit maximaler Schwebung

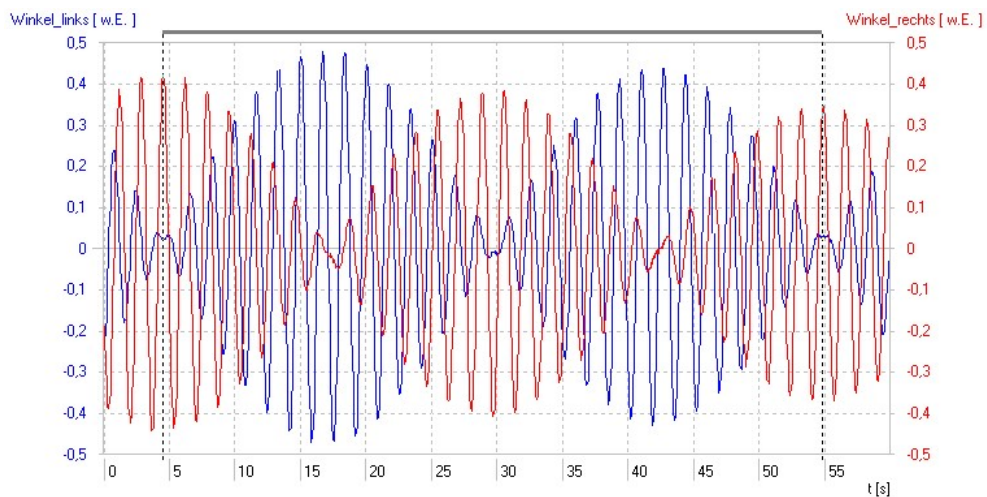


Fig. 5: Auslenkung-Zeit-Diagramm der gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

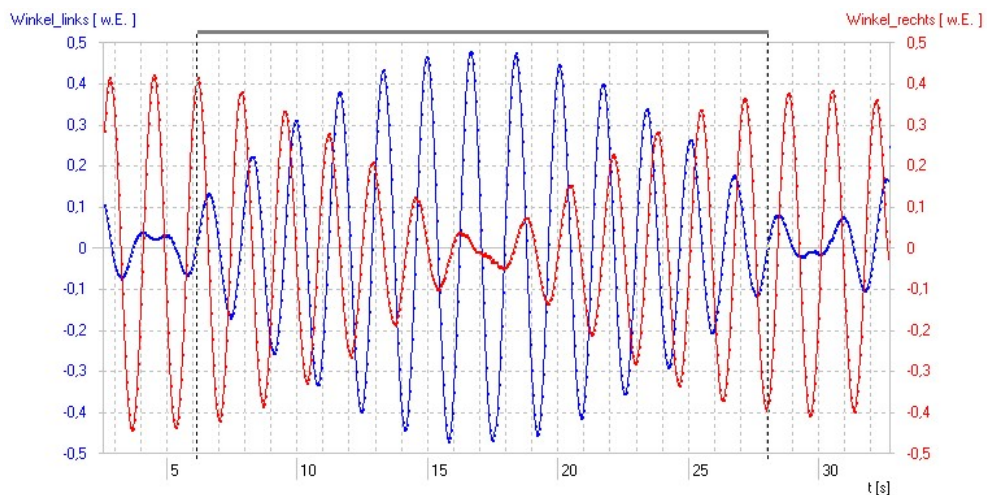


Fig. 6: Vergrößerte Darstellung einer Schwebungsperiode der gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

## AUSWERTUNG

### 1. Bestimmung der Schwingungsdauer der gleichphasigen gekoppelten Schwingung

- Datensatz zur gleichphasigen Schwingung öffnen.
- Im Diagramm möglichst viele Schwingungsperioden eines Pendels mit den Cursors einschließen, dazu beide Cursors jeweils genau auf den Nulldurchgang einer steigenden Flanke setzen, damit eine ganze Zahl von Perioden eingeschlossen wird (vgl. Fig. 3).
- Den Zeitabstand der Cursor ablesen (Fig. 3, roter Kasten).

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Perioden ergibt die Schwingungsdauer

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

### 2. Bestimmung der Schwingungsdauer der gegenphasigen gekoppelten Schwingung

- Datensatz zur gegenphasigen Schwingung öffnen und in gleicher Weise vorgehen.

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Perioden ergibt die Schwingungsdauer

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

### 3. Bestimmung der Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung

- Datensatz zur Schwingung mit maximaler Schwebung öffnen.
- Mit den Cursors eine oder wenn möglich mehrere Schwebungsperiode(n) einschließen (vgl. Fig. 5) und den Zeitabstand der Cursor ablesen.

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Schwebungsperioden ergibt die Schwebungsdauer

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Skalierung der Zeitachse so ändern, dass eine Schwebungsperiode vergrößert dargestellt wird.
- Mit den Cursors im Diagramm möglichst viele Schwingungsperioden eines Pendels innerhalb einer Schwebungsperiode (Zeit zwischen zwei Stillständen des Pendels in der Ruhelage) einschließen (vgl. Fig. 6) und den Zeitabstand der Cursor ablesen.

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Perioden ergibt die Schwingungsdauer

$$T = 1,685 \text{ s}$$

### 4. Vergleich der gemessenen Schwebungs- und Schwingungsdauer mit den aus den Eigenschwingungsdauern berechneten Werten

Für die Schwingungsdauer  $T$  der gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung folgt aus (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Dieser Wert ist mit dem Messwert  $T = 1,685 \text{ s}$  zu vergleichen.

Auf ähnliche Weise errechnet man die Schwebungsdauer  $T_{\Delta}$ . Allerdings ist zu beachten, dass diese üblicherweise als Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels in der Ruhelage definiert wird. Dies entspricht der Hälfte der Periodendauer des modulierenden Kosinusters oder Sinusters in (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Dieser Wert ist mit dem Messwert  $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$  zu vergleichen.

Die Abweichung um etwa eine Sekunde vom Messwert mag auf den ersten Blick groß erscheinen, liegt aber in der empfindlichen Abhängigkeit von der Differenz der Eigenschwingungsdauern begründet. Schon eine Schwankung um vier Millisekunden, welche ungefähr im Bereich der in diesem Versuch maximal erreichbaren Messgenauigkeit für die Eigenschwingungsdauern liegt, geht mit einer Änderung der Schwebungsdauer um eine Sekunde einher.

### 5. Bestimmung der Federkonstanten der Koppelfeder

Die Federkonstante der Koppelfeder  $D$  hängt mit der Kopplungskonstanten  $k$  wie folgt zusammen

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

( $d$ : Abstand des Befestigungspunktes der Koppelfeder von der Aufhängung des Pendels).

Bei schwacher Kopplung ( $k \ll g$ ) hat die Federkonstante nur einen geringen Einfluss auf die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung, aber einen großen Einfluss auf die Schwebungsdauer. Daher sollte für die Bestimmung der Federkonstanten eine Beziehung zur Schwebungsdauer benutzt werden, die man erhält, wenn man (4) in (8) einsetzt und nach  $k$  umformt.

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

Nun drückt man die Kreisfrequenzen durch Schwingungsdauern aus und setzt in (11) ein.

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$

### Coupled oscillations

#### RECORD AND EVALUATE OSCILLATION OF TWO IDENTICAL COUPLED PENDULUMS.

- Record the oscillations when they are in phase and determine the period  $T_+$ .
- Record the oscillations when they are out of phase and determine the period  $T_-$ .
- Record the oscillations of a coupled pendulum at the maximum beat amplitude and determine the period  $T$  of the oscillations and the period  $T_{\square}$  of the beats.
- Compare the measurements for the two periods with the values calculated from the intrinsic periods  $T_-$  and  $T_+$ .
- Determine the spring constant of the spring coupling the two pendulums.

UE1050600  
01/24 CW/UD

#### BASIC PRINCIPLES

For oscillation of two coupled pendulums, the oscillation energy is transferred from one pendulum to the other and back again. If the two pendulums are identical and the oscillation is started from a position where one is suspended in its rest position while the other is at a point of maximum deflection, then all the energy in the system is transferred between the pendulums. I.e., one pendulum always comes to rest while the other is swinging at its maximum amplitude. The time between two such occurrences of rest for one pendulum or, more generally, the time between any two instances of minimum amplitude is referred to as the beat period.  $T_{\Delta}$ .

The oscillation of two identical coupled ideal pendulums can be regarded as a superimposition of two natural oscillations. These natural oscillations can be observed when both pendulums are fully in phase or fully out of phase. In the first case, both pendulums vibrate at the

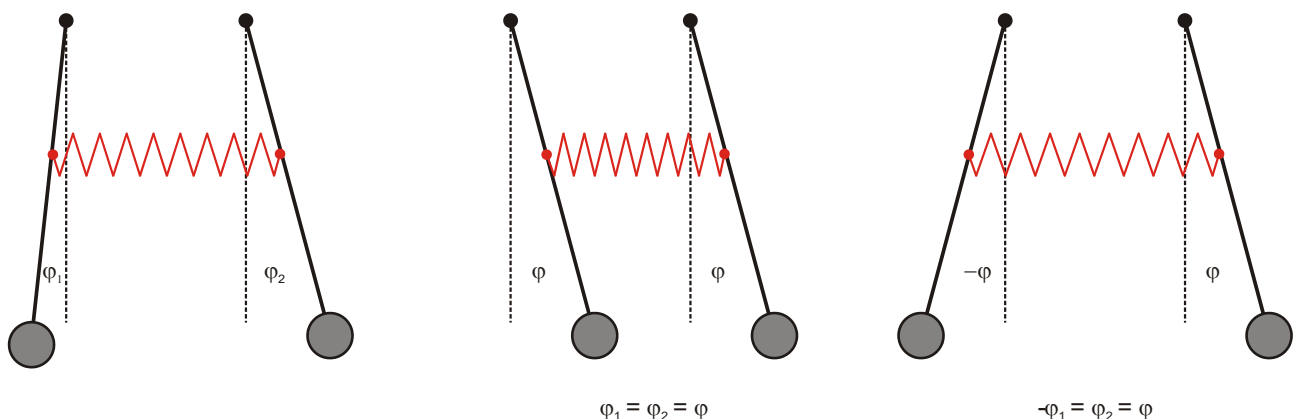
frequency that they would if the coupling to the other pendulum were not present at all. In the second case, the effect of the coupling is at a maximum and the inherent frequency is greater. All other oscillations can be described by superimposing these two natural oscillations.

The equation of motion for the pendulums (for small angles of deflection  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ ) takes the form:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$g$ : Acceleration due to gravity,  $L$ : length of pendulum,  $k$ : coupling constant

Fig. 1: Left: general coupled oscillation, Middle: coupled oscillation in phase. Right: coupled oscillation out of phase



For the motions  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  and  $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$  (initially chosen arbitrarily) the equation of motion is as follows:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

The solutions

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{3}$$

give rise to angular frequencies

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \tag{4}$$

corresponding to the natural frequencies for in phase or out of phase motion ( $\varphi_+ = 0$  for out of phase motion and  $\varphi_- = 0$  for in-phase motion).

The deflection of the pendulums can be calculated from the sum or the difference of the two motions, leading to the solutions

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{5}$$

Parameters  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$  and  $b_-$  are arbitrary coefficients that can be calculated from the initial conditions for the two pendulums at time  $t = 0$ .

The easiest case to interpret is where pendulum 1 is deflected by an angle  $\varphi_0$  from its rest position and released at time 0 while pendulum 2 remains in its rest position.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{6}$$

After rearranging the equations they take the form

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

with

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

This corresponds to an oscillation of both pendulums at identical angular frequency  $\omega$ , where the amplitudes are modulated at an angular frequency  $\omega_\Delta$ . This kind of modulation results in beats. In the situation described, the amplitude of the beats arrives at a maximum since the overall amplitude falls to a minimum at zero.

### LIST OF APPARATUS

- 2 Pendulum Rods with Angle Sensor, 12 V AC @230 V 1000763 (U8404275-230)
- or
- 2 Pendulum Rods with Angle Sensor, 12 V AC @115 V 1000762 (U8404275-115)
- 1 Helical Spring 3.9 N/m 1002945 (U15027)
- 2 Table Clamps 1002832 (U1326)
- 2 Stainless Steel Rods 1000 mm 1002936 (U15004)
- 1 Stainless Steel Rod 470 mm 1002934 (U15002)
- 4 Universal Clamps 1002830 (U13255)
- 2 Adapters, BNC Plug/4 mm Jacks 1002750 (U11259)
- 2 Voltage Sensors 10 V 1021682 (UCMA-BT02)
- 1 Data Logger
- 1 Software

More information about digital measurement can be found on the experiment's webpage in the 3B Webshop.

### SET-UP

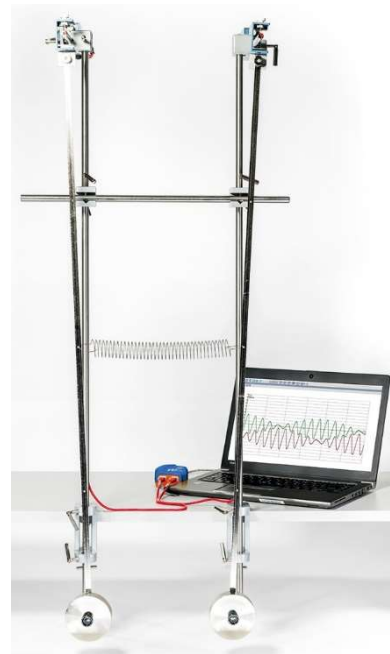


Fig. 2: Set-up for recording and evaluating the oscillation of two identical pendulums coupled together by a spring

The set-up is illustrated in Fig. 2.

- Clamp two stand rods of 1000 mm length to a bench so that they are about 15 cm apart.
- Attach a short stand rod between them as a horizontal cross member to lend the set-up more stability.
- Attach the angle sensors to the top of the vertical rods using universal clamps.
- Attach bobs to the end of the pendulum rods.

- Suspend the pendulum rods from the angle sensors (there are grooves in the angle sensors to accommodate the hinge pins of the pendulum rods).
- Attach the spring via the holes in the pendulum rods. These are about 40 cm from the fulcrum of the pendulum.
- Plug the adapters BNC Plug/4 mm Jacks into the angle sensors and connect the voltage sensors.
- Connect the voltage sensors to the data logger.
- Connect the two angle sensors to the mains using the plug-in power supplies.

### EXPERIMENT PROCEDURE

- Start the software and record the time curves of the voltage signals from both sensors.
- 1. Record an in-phase oscillation**
    - Deflect both pendulums to the same (small) angle and release them simultaneously.
  - 2. Record an out-of-phase oscillation**
    - Deflect both pendulums to the same (small) angle but in opposite directions and release them simultaneously
  - 3. Record the oscillation of coupled pendulums with maximum beat amplitude**
    - If necessary, increase the number of measured values.
    - Deflect one pendulum rod keeping the other in its rest position then release both together.

### SAMPLE MEASUREMENTS

#### 1. In-phase coupled oscillation

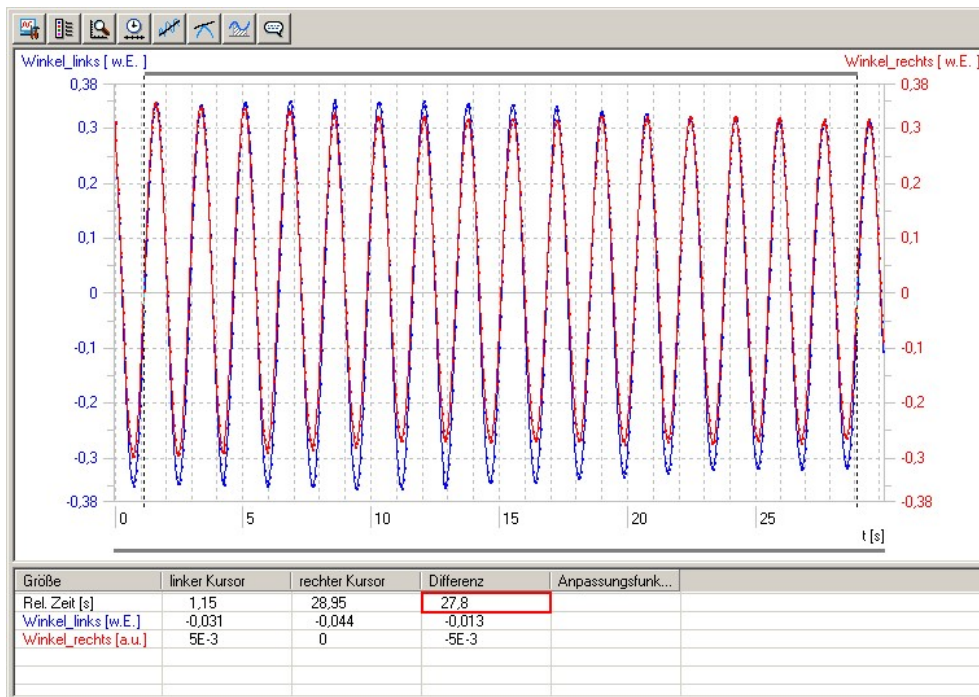


Fig. 3: Angle-time diagram for an in-phase oscillation of coupled pendulums (blue: left-hand pendulum, red: right-hand pendulum). The angle scale has not been calibrated



### 2. Out-of-phase coupled oscillation

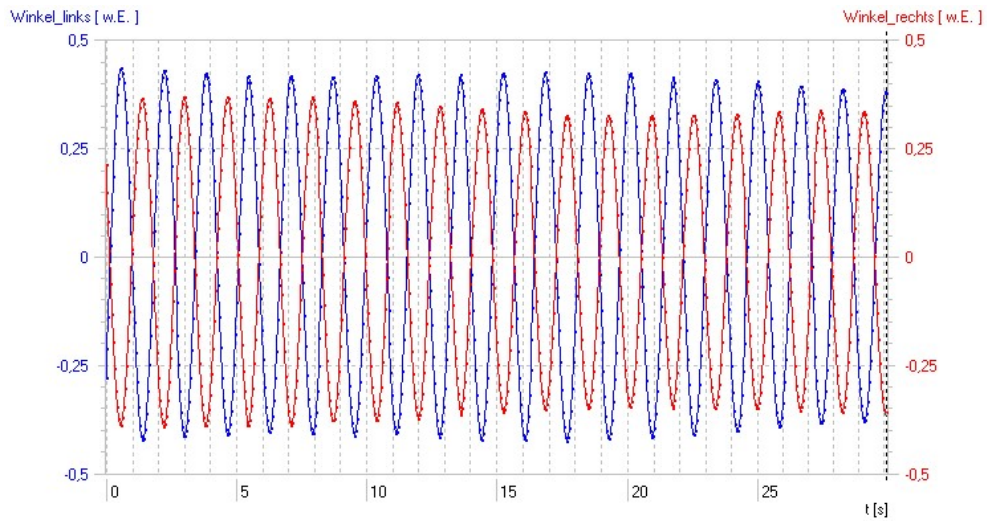


Fig. 4: Angle-time diagram for an out-of-phase oscillation of coupled pendulums (blue: left-hand pendulum, red: right-hand pendulum). The angle scale has not been calibrated

### 3. Oscillation of coupled pendulums with maximum beat amplitude

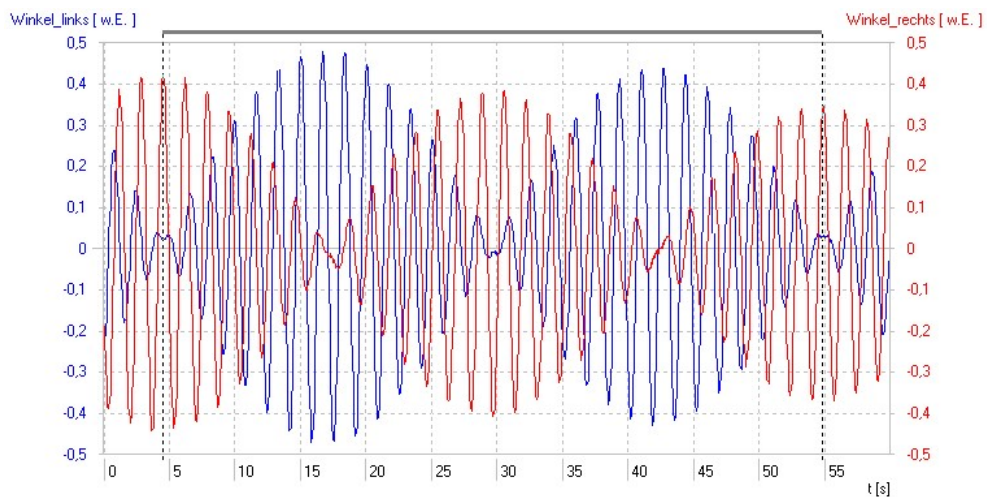


Fig. 5: Angle-time diagram for an oscillation of coupled pendulums with maximum beat amplitude (blue: left-hand pendulum, red: right-hand pendulum). The angle scale has not been calibrated

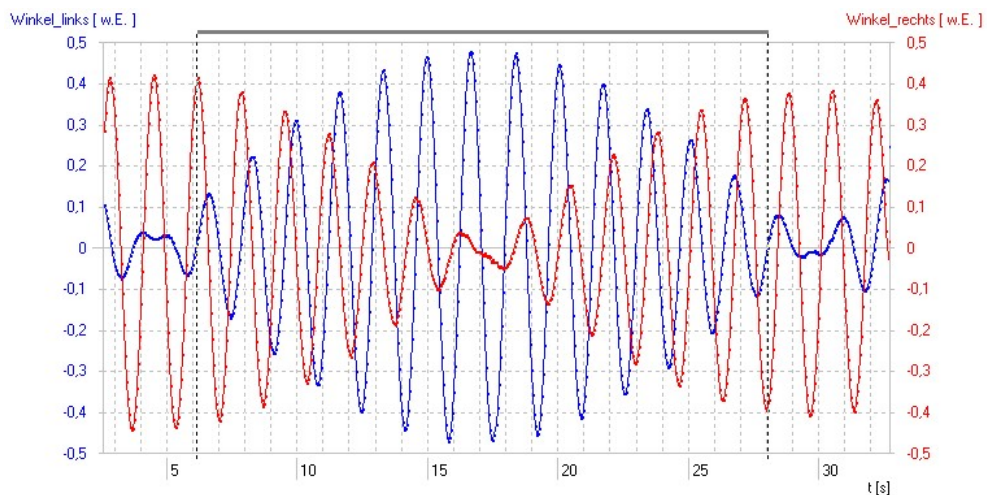


Fig. 6: Magnified view of one beat period in the oscillation of coupled pendulums with maximum beat amplitude (blue: left-hand pendulum, red: right-hand pendulum). The angle scale has not been calibrated

## EVALUATION

### 1. Determine the period of oscillation for coupled pendulums oscillating in phase

- Open the data entry for the in-phase oscillation.
- Set up the display to include as many complete oscillations as possible between cursors. The cursors should be set precisely at points where the oscillation crosses the axis heading upwards so that a whole number of periods is included (cf. Fig. 3).
- Read off the time between the cursors (Fig. 3, red box).

The period of the oscillation is the time between the cursors divided by the number of complete oscillations included in that time

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

### 2. Determine the period of oscillation for coupled pendulums oscillating out of phase

- Open the data entry for the out-of-phase oscillation and proceed exactly as before.

The period of the oscillation is the time between the cursors divided by the number of complete oscillations included in that time

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

### 3. Determine the period of oscillation for coupled pendulums oscillating with a maximum beat amplitude

- Open the data entry for the oscillation with the maximum beat amplitude.
- Set up the cursors so that they include one or more complete periods of the beat oscillation (cf. Fig. 5) and read off the time between the cursors.

The period of the maximum beat amplitude is the time between the cursors divided by the number of periods of the beat oscillation included in that time

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Change the scale of the time axis so that one period of the beats is displayed in a magnified view.
- Set the cursors so that they include as many oscillations of one of the pendulums as possible within the space of one beat (time between successive points where the pendulums stop still at the rest position - cf. Fig. 6) and read off the time between the cursors.

The period of the oscillation is the time between the cursors divided by the number of complete oscillations included in that time

$$T = 1,685 \text{ s}$$

### 4. Compare the measurements for the two periods with the values as calculated from the intrinsic periods

For a coupled oscillation with a period  $T$ , where the beat amplitude is at its maximum, the expression below follows from equation (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Compare this with the measured value of  $T = 1.685 \text{ s}$ .

The beat period  $T_{\Delta}$  can also be calculated in a similar way. It should be noted, however, that this is usually defined to be the time between successive points where the pendulums stop still at the rest position. This actually represents only half the period of the underlying cosine or sine modulation term in equation (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Compare this answer with the measured value of  $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$ .

The difference of about one second between the calculated and measured values may seem to be quite large at first glance but it is due to the calculation being highly sensitive to differences between the intrinsic oscillation periods. If the intrinsic periods of the two pendulums differ by as little as 4 milliseconds, which roughly corresponds to the maximum measurement accuracy achievable for the intrinsic oscillation periods in this experiment, it leads to a difference of a whole second in the beat period.

### 5. Determine the spring constant of the spring coupling the two pendulums

The spring constant  $D$  of the spring coupling the pendulums is related to the coupling constant  $k$  as follows:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

( $d$ : distance between the point at which the spring is connected to the pendulum and the fulcrum of the pendulum)

If the coupling is weak ( $k \ll g$ ) the spring constant has little influence on the period of the out-of-phase oscillation but has a major influence on the beat period. Thus to calculate the spring constant, we relate it to the beat period by substituting equation (4) into (8) and rearranging to give  $k$ .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

Now the angular frequencies are replaced by the periods and substituted into equation (11) to give:

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$

## Oscilaciones acopladas

### REGISTRO Y ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES DE DOS PÉNDULOS IDÉNTICOS Y ACOPLADOS.

- Registro de la oscilación equifásica y determinación de su frecuencia de oscilación  $T_+$ .
- Registro de la oscilación en oposición de fase y determinación de su frecuencia de oscilación  $T_-$ .
- Registro de oscilaciones acopladas con batidos máximos y determinación del período de oscilación  $T$  así como el período de los batidos  $T_\Delta$ .
- Comparación de los períodos de los batidos y de la oscilación con los valores calculados a partir de las oscilaciones propias  $T$  y  $T_+$ .
- Determinación de la constante del muelle de acoplamiento.

UE1050600

01/24 CW/UD

### FUNDAMENTOS GENERALES

En la oscilación de dos péndulos acoplados, la energía se transmite entre los dos péndulos en ambas direcciones. Si los péndulos son iguales y se excitan a una oscilación de tal forma que al principio uno de los péndulos se encuentre en su posición de reposo, la transmisión de la energía es total. Esto significa que un péndulo llega por completo al estado de reposo mientras el otro oscila con máxima amplitud. El tiempo transcurrido entre dos estados de reposo de un péndulo o, en general, entre dos instantes diferentes en los que el péndulo oscila con amplitud mínima, se denomina frecuencia de batido  $T_\Delta$ .

Las oscilaciones de dos péndulos matemáticos idénticos y acoplados se pueden describir como superposiciones de dos oscilaciones propias. Es posible observar estas oscilaciones propias si se provoca la oscilación de ambos péndulos en fases iguales u opuestas. En el primer caso, los péndulos oscilan sin influencia del

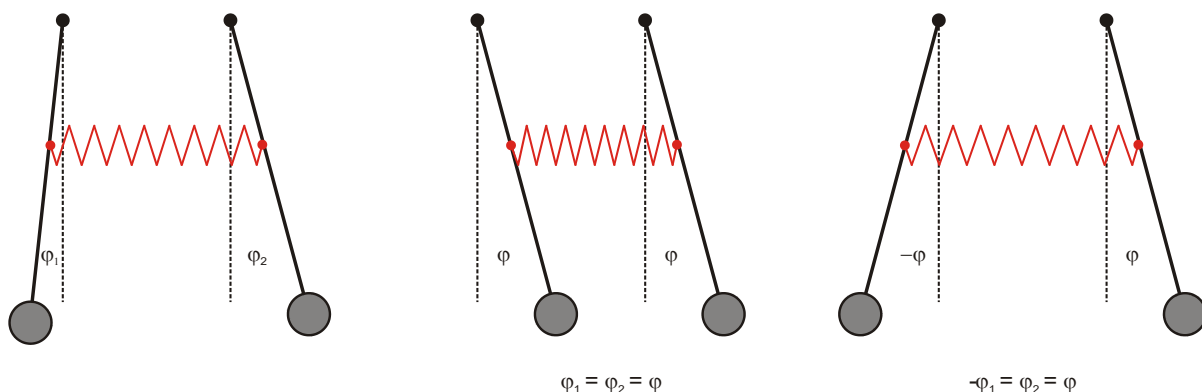
acoplamiento, con frecuencia de péndulo desacoplado; en el segundo caso, oscilan con la máxima influencia del acoplamiento y la mayor frecuencia propia. Todas las demás oscilaciones son representables como superposiciones de estas dos oscilaciones propias.

Las ecuaciones de movimiento de los péndulos indican (para desviaciones pequeñas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ) lo siguiente:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$g$ : aceleración de caída,  $L$ : longitud del péndulo,  $k$ : constante de acoplamiento

Fig. 1: Izquierda: oscilación acoplada general; centro: oscilación acoplada equifásica; derecha: oscilación acoplada en oposición de fase



Para las variables auxiliares (introducidas, en primer lugar, arbitrariamente)  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  y  $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$  se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Cuyas resoluciones

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{3}$$

corresponden a las frecuencias circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ y } \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \tag{4}$$

de las oscilaciones propias descritas con excitación equifásica o en oposición de fase (es válido  $\varphi_+ = 0$  en el caso de equifase y  $\varphi_- = 0$  para oscilación en oposición de fase).

Las desviaciones de los péndulos se pueden calcular a partir de la suma o la diferencia de ambas variables auxiliares, con lo que se obtiene la solución

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{5}$$

Aquí, los parámetros  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$  y  $b_-$  son, en primer lugar, variables arbitrarias, que se pueden calcular a partir del estado de oscilación de ambos péndulos en el instante en que  $t = 0$ .

El más sencillo de interpretar es el siguiente caso, que se excita cuando el péndulo 1, en el momento 0 se desvía un ángulo  $\varphi_0$  de su posición de reposo y se deja libre, mientras el péndulo 2 se encuentra en su posición de reposo 0.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{6}$$

Tras la transformación matemática se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

en donde

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Esto corresponde a una oscilación de ambos péndulos con la misma frecuencia angular  $\omega$ , en donde sus amplitudes se modulan con la frecuencia angular  $\omega_\Delta$ . Esta clase de modulación se denomina batido. En el presente caso se puede hablar hasta de un batido máximo, porque la amplitud logra llegar a su mínimo valor igual a cero.

## LISTA DE EQUIPOS

- 2 Péndulos de barra con sensor angular @230 V 1000763 (U8404275-230)
- 0
- 2 Péndulos de barra con sensor angular @115 V 1000762 (U8404275-115)
- 1 Resorte helicoidal 3,9 N/m 1002945 (U15027)
- 2 Pinzas de mesa 1002832 (U1326)
- 2 Varillas de soporte, 1000 mm 1002936 (U15004)
- 1 Varilla de soporte, 470 mm 1002934 (U15002)
- 4 Nueces universales 1002830 (U13255)
- 2 Adaptadores conector macho BNC/casquillos de 4 mm 1002750 (U11259)
- 2 Sensores de tensión de 10 V 1021682 (UCMA-BT02)

1 Data logger

1 Software

Encontrará más información sobre la medición digital en el sitio web del producto, en la tienda virtual de 3B.

## MONTAJE

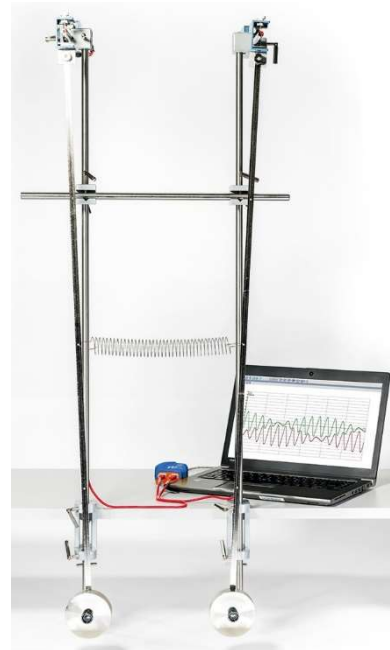


Fig. 2: Montaje para el registro y la evaluación de las oscilaciones de dos péndulos acoplados iguales

El montaje se representa en la Fig. 2.

- Utilizando pinzas de mesa se fijan en el borde de la mesa de trabajo dos varillas soporte de 1000 mm de longitud a una distancia entre sí de aprox. 15 cm.
- Con una varilla soporte corta se acoplan horizontalmente las dos varillas largas, para darle más estabilidad el sistema.
- Por medio de nueces universales se fija un captador de ángulo en el extremo superior de cada una de las varillas soporte verticales.

- Se fija una masa pendular en el extremo inferior de cada una de las varillas pendulares verticales.
- Se cuelgan las varillas pendulares en los captadores de ángulo (para las espigas de la suspensión del péndulo se tienen muescas en cada una de las barras de los captadores de ángulo).
- Se acopla el muelle helicoidal en los orificios de las varillas pendulares que se encuentran a una distancia de aprox. 40 cm del punto de suspensión.
- Se conectan los adaptadores conector macho BNC/casquillos de 4 mm a los sensores angulares y se conectan los sensores de tensión.
- Se conectan los sensores de tensión al data logger.
- Se conectan los sensores angulares a la red eléctrica mediante las fuentes de alimentación enchufables.

## EJECUCIÓN

- Se inicia el software y se registran las curvas temporales de las señales de tensión de ambos sensores.
- 1. Registro de las oscilaciones en fase**
    - Ambos péndulo se desvían de la posición de reposo en un ángulo igual (pequeño) en la misma dirección y luego se dejan libres al mismo tiempo.
  - 2. Registro de las oscilaciones en contrafase**
    - Ambos péndulos se desvían de la posición de reposo en un ángulo igual (pequeño) pero en direcciones contrarias la una de la otra y se dejan libres al mismo tiempo.
  - 3. Registro de oscilaciones acopladas con batidos máximos**
    - Si es necesario, aumente el número de valores medidos.
    - Una varilla pendular se desvía de la posición de reposo y la otra se mantiene en la posición de reposos y luego se dejan libres al mismo tiempo.

## EJEMPLO DE MEDICIÓN

### 1. Registro de las oscilaciones en fase

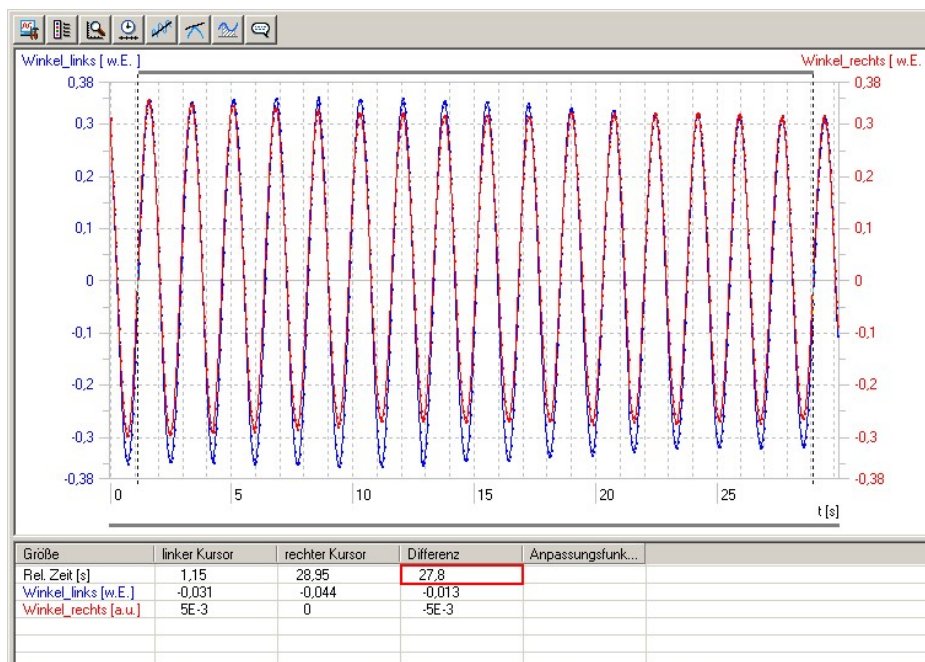


Fig. 3: Diagrama de la desviación con el tiempo de las oscilaciones acopladas en fase (azul: péndulo izquierdo; rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada

## 2. Oscilaciones acopladas en contrafase

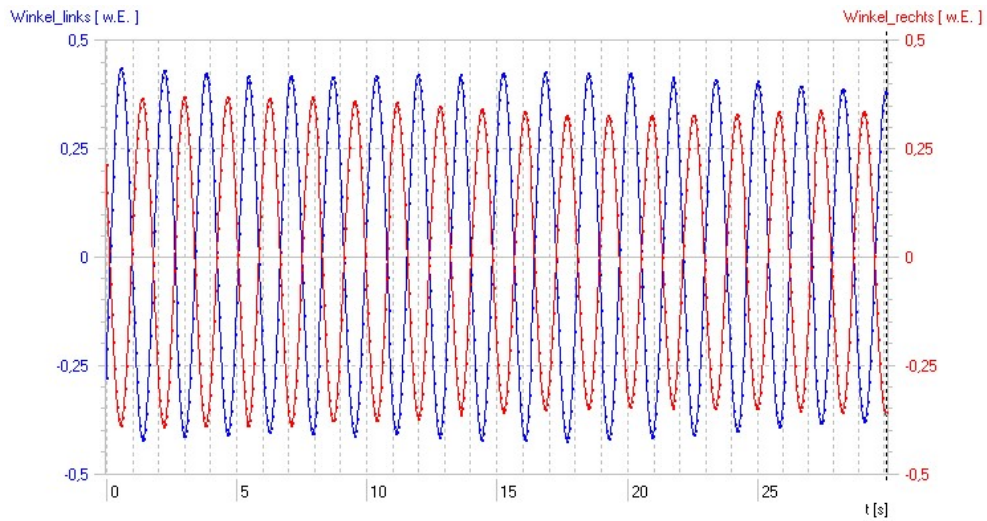


Fig. 4: Diagrama de desviación con el tiempo de oscilaciones acopladas en contrafase (azul: péndulo izquierdo, rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada

## 3. Oscilaciones acopladas con batidos máximos

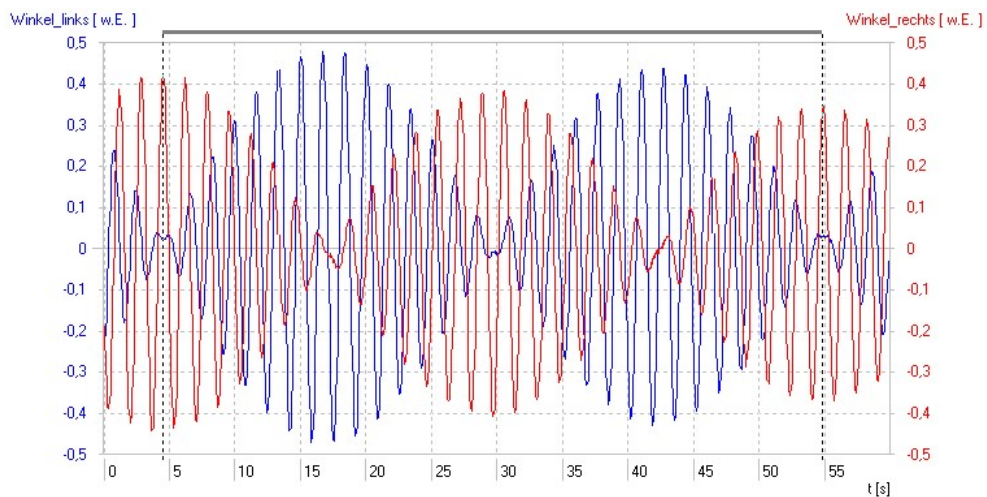


Fig. 5: Diagrama de desviación con el tiempo de oscilaciones acopladas con batidos máximos (azul: péndulo izquierdo, rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada

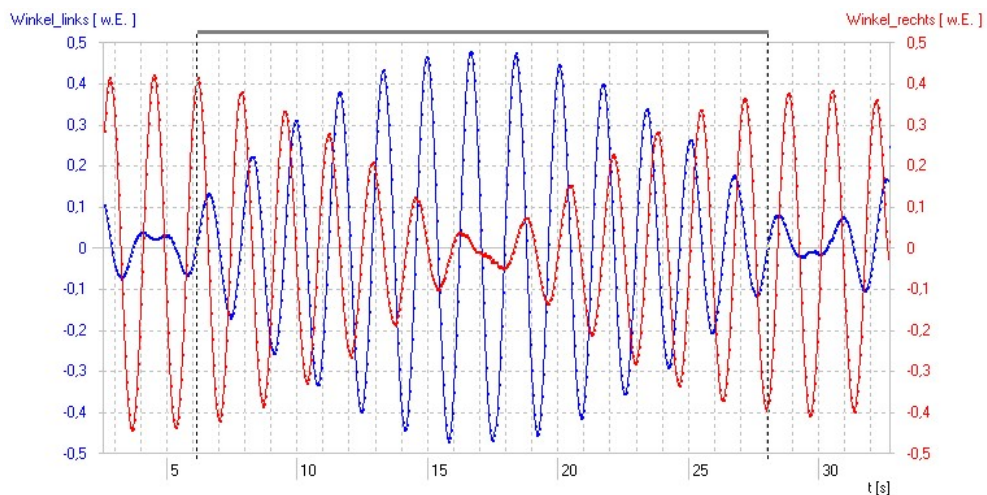


Fig. 6: Representación aumentada de un período de batidos de oscilaciones acopladas con batidos máximos (azul: péndulo izquierdo, rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada

## EVALUACIÓN

### 1. Determinación del período de oscilaciones acopladas en fase

- Se abre el juego de datos de las oscilaciones acopladas en fase.
- En el diagrama se incluyen en medio de los cursores un número grande de oscilaciones, para ello, se coloca cada uno de ellos en el paso por cero de un flanco positivo para que se encierre un número completo de períodos (ver. Fig. 3).
- Se lee la distancia en el tiempo de los dos cursores (Fig. 3, recuadro rojo).

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

### 2. Determinación del período de las oscilaciones acopladas en contrafase

- Se abre un juego de datos para las oscilaciones acopladas en contrafase y se procede de la misma forma.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

### 3. Determinación del período de las oscilaciones acopladas con batidos máximos

- Se abre un juego de datos para las oscilaciones acopladas con batidos máximos.
- Con los dos cursores se encierra un y si es posible varios períodos de batidos (ver Fig. 5) y se lee la distancia temporal.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de los batidos.

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Se cambia la escala del eje de los tiempos para representar en la pantalla un período de batido.
- Se encierran con los dos cursores el mayor número posible de períodos de oscilación de un péndulo dentro de un período de batido (el tiempo entre dos pasos por cero de la oscilación en la posición de reposo) y se lee la distancia temporal entre los dos cursores.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T = 1,685 \text{ s}$$

### 4. Comparación de los períodos de oscilación y de batido con los valores calculados en base a los períodos de las oscilaciones propias

Para el período  $T$  de las oscilaciones acopladas con batidos máximos se tiene (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Este valor se compara con el valor medido de  $T = 1,685 \text{ s}$ .

En forma similar se calcula el período de los batidos  $T_{\Delta}$ . Sin embargo es necesario tener en cuenta que éste normalmente se define como el tiempo entre dos detenciones secuenciales en la posición de reposo. Éste corresponde a la mitad del período del término de coseno que modula resp. el término de seno en (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Este valor se compara con el valor de medida de  $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$ .

La desviación de aprox. 1 segundo en el valor de medida puede a primera vista parecer muy grande, pero se justifica por la dependencia sensible de la diferencia de los períodos de las oscilaciones propias. Una fluctuación de 4 milisegundos, la cual está dentro de la máxima exactitud de medida que se puede lograr en este experimento, conduce a un cambio en el período de los batidos de aprox. 1 segundo.

### 5. Determinación de la constante del muelle de acoplamiento

La constante del muelle de acoplamiento  $D$  de la constante de acoplamiento  $k$ , como se indica a continuación

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

( $d$ : Distancia entre el punto de fijación del muelle de acoplamiento y el punto de suspensión del péndulo).

Con un acoplamiento débil ( $k \ll g$ ) la constante del muelle tiene sólo una influencia muy débil sobre el período de la oscilación en contrafase, pero una fuerte influencia sobre el período de los batidos. Por lo tanto para determinar la constante del muelle se debe utilizar la relación con el período de batidos, la cual se obtiene cuando se introduce (4) en (8) y se despeja  $k$ .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

Las frecuencias angulares se expresan por medio de los períodos de oscilación y se sustituye en (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$

### Oscillations couplées

#### ENREGISTREMENT ET EVALUATION DES OSCILLATIONS DE DEUX PENDULES IDENTIQUES COUPLES.

- Enregistrement de l'oscillation en phase et détermination de la période d'oscillation  $T_+$ .
- Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase et détermination de la période d'oscillation  $T_-$ .
- Enregistrement d'une oscillation couplée avec battement maximum et détermination de sa période d'oscillation  $T$  ainsi que de la période de battement  $T_\Delta$ .
- Comparaison de la période de battement et de la période d'oscillation avec les valeurs calculées à partir des périodes d'oscillation propre  $T_-$  et  $T_+$ .
- Détermination des constantes de rappel des ressorts de couplage.

UE1050600  
01/24 CW/UD

#### NOTIONS DES BASE GÉNÉRALES

Lorsque deux pendules couplés oscillent, de l'énergie est va et vient entre les deux pendules. Si les deux pendules sont identiques et que leurs oscillations sont excitées de telle manière que l'un des pendules se trouve au départ en position de repos alors que l'autre pendule est élongé au maximum, le transfert d'énergie est même intégral. C'est-à-dire qu'un pendule est entièrement au repos, tandis que l'autre oscille avec une amplitude maximale. La durée entre les deux arrêts d'un pendule ou, d'une manière générale, entre deux moments où le pendule oscille avec une amplitude minimale, est la période de battement  $T_\Delta$ .

Les oscillations entre deux pendules mathématiques identiques couplés peuvent être décrites comme superposition de deux oscillations propres. On peut observer ces oscillations propres en excitant les deux pendules à des oscillations en phase ou en opposition de phase.

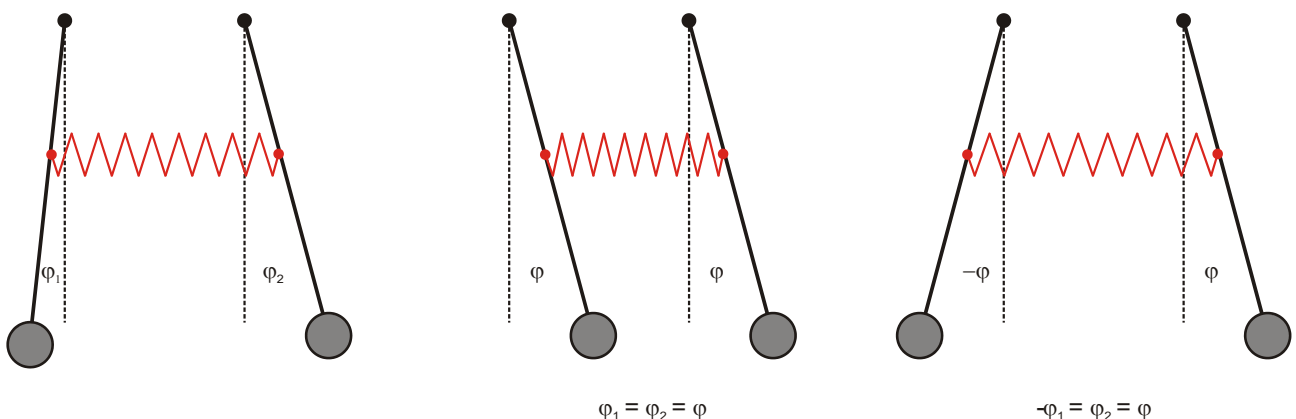
Dans le premier cas, les pendules sans influence du couplage oscillent à la fréquence des pendules non couplés, dans le second cas, sous l'influence maximale du couplage, ils oscillent à la fréquence propre maximale. Toutes les autres oscillations peuvent être représentées comme des superpositions de ces deux oscillations propres.

On obtient pour le mouvement des pendules l'équation suivante (pour petits angles d'élongation  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ) :

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$g$  : accélération de la pesanteur,  $L$  : longueur de pendule,  $k$  : constante de couplage

Fig. 1: A gauche : oscillation couplée générale. Au milieu : oscillation couplée en phase. A droite : oscillation couplée en opposition de phase





Pour les grandeurs auxiliaires  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  et  $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$  (arbitraires dans un premier temps), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Leurs solutions

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{3}$$

avec les fréquences angulaires

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ et } \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \tag{4}$$

correspondent aux oscillations propres décrites en cas d'excitation en phase ou en opposition de phase ( $\varphi_+ = 0$  en phase et  $\varphi_- = 0$  en opposition de phase).

Les déviations des pendules peuvent être calculées à partir de la somme ou la différence des deux grandeurs auxiliaires. On obtient la solution

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{5}$$

Dans un premier temps, les paramètres  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$  et  $b_-$  sont des grandeurs quelconques qui peuvent être calculées depuis l'état d'oscillation des deux pendules au moment  $t = 0$ .

Le cas suivant qui consiste à tirer sur le pendule 1 avec un angle  $\varphi_0$  au temps 0 et à partir de la position zéro et à le relâcher ensuite, pendant que le pendule 2 se trouve à l'état d'équilibre à la position zéro, est le plus facile à interpréter.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{6}$$

Après la conversion mathématique, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Cela correspond à une oscillation des deux pendules avec la même fréquence angulaire  $\omega$ , leurs amplitudes étant modulées avec la fréquence angulaire  $\omega_\Delta$ . On désigne une telle modulation sous le terme de battement. Dans le cas présenté ici, on peut même parler de battement maximum parce que la valeur minimum atteinte par l'amplitude est zéro.

## LISTE DES APPAREILS

- 2 Pendules avec capteur de mouvement @230 V 1000763 (U8404275-230)
- ou
- 2 Pendules avec capteur de mouvement @115 V 1000762 (U8404275-115)
- 1 Ressort cylindrique 3,9 N/m 1002945 (U15027)
- 2 Eaux de fixation 1002832 (U1326)
- 2 Tiges statif, 1000 mm 1002936 (U15004)
- 1 Tige statif, 470 mm 1002934 (U15002)
- 4 Noix universelles 1002830 (U13255)
- 2 Adaptateurs BNC / douilles 4 mm 1002750 (U11259)
- 2 Capteurs de tension 10 V 1021682 (UCMA-BT02)
- 1 Enregistreur de données
- 1 Logiciel

De plus amples informations sur la mesure numérique sont disponibles sur le site web du produit dans la boutique en ligne 3B.

## MONTAGE

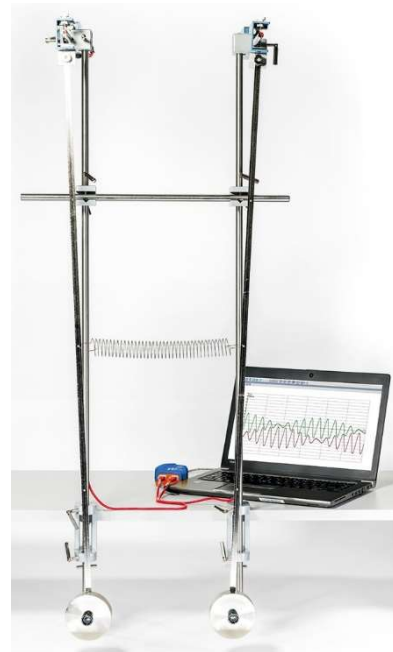


Fig. 2: Montage pour l'enregistrement et l'analyse des oscillations de deux pendules couplés identiques

Le montage est illustré sur la Fig. 2.

- Fixer les tiges statif d'une longueur de 1000 mm sur le plan de travail à un intervalle d'env.15 cm à l'aide de pinces-étaux.
- Fixer la tige statif courte à l'horizontale pour mieux stabiliser le montage.
- Fixer le capteur angulaire à l'extrémité supérieure des barres de support verticales à l'aide de manchons universels.

- Fixer les masses à l'extrémité inférieure des barres de pendule.
- Accrocher les barres de pendule sur les capteurs angulaires (des encoches sont prévues dans les tiges des capteurs d'angle pour les aiguilles du dispositif de suspension du pendule).
- Accrocher les ressorts à boudin dans les trous situés sur les barres de pendule, qui se trouvent à env. 40 cm de la suspension.
- Enficher les adaptateurs BNC / douilles 4 mm sur les capteurs angulaires et raccorder les capteurs de tension.
- Connecter les capteurs de tension à l'enregistreur de données.
- Raccorder les deux capteurs angulaires au réseau électrique à l'aide des blocs d'alimentation.

**REALISATION**

- Lancer le logiciel et enregistrer les courbes temporelles des signaux de tension des deux capteurs.
- 1. Enregistrement de l'oscillation équi-phase**
    - Tirer sur les deux pendules dans la même direction et avec le même angle (réduit) et les relâcher aussitôt.
  - 2. Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase**
    - Tirer sur les deux pendules dans la direction opposée et avec le même angle (réduit) et les relâcher aussitôt.
  - 3. Enregistrement d'une oscillation couplée avec battement maximum**
    - Le cas échéant, augmenter le nombre de valeurs mesurées.
    - Tirer sur une barre de pendule et maintenir l'autre en position zéro, puis relâcher les deux en même temps.

**EXEMPLES DE MESURE**

**1. Oscillation couplée équi-phase**

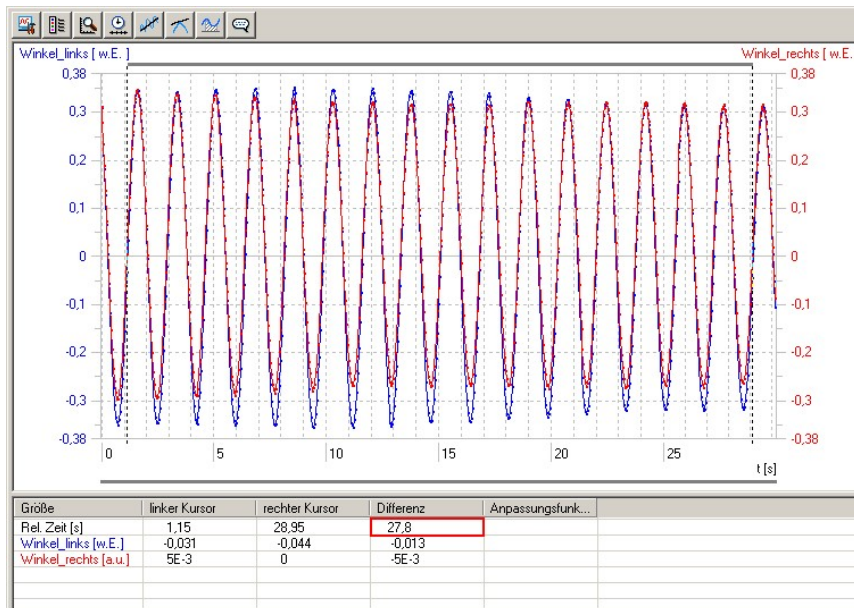


Fig. 3: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée équi-phase (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

## 2. Oscillation couplée en opposition de phase

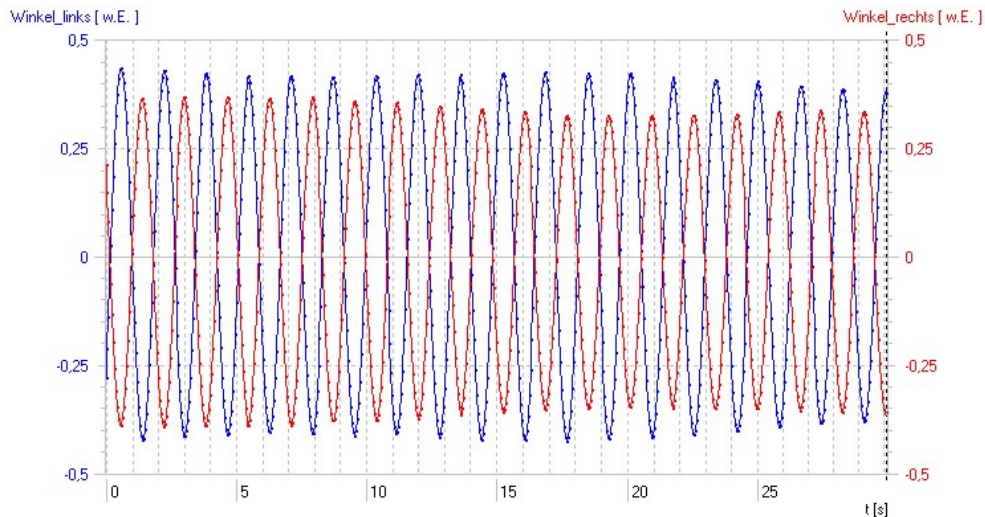


Fig. 4: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée en opposition de phase (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

## 3. Oscillation couplée avec battement maximum

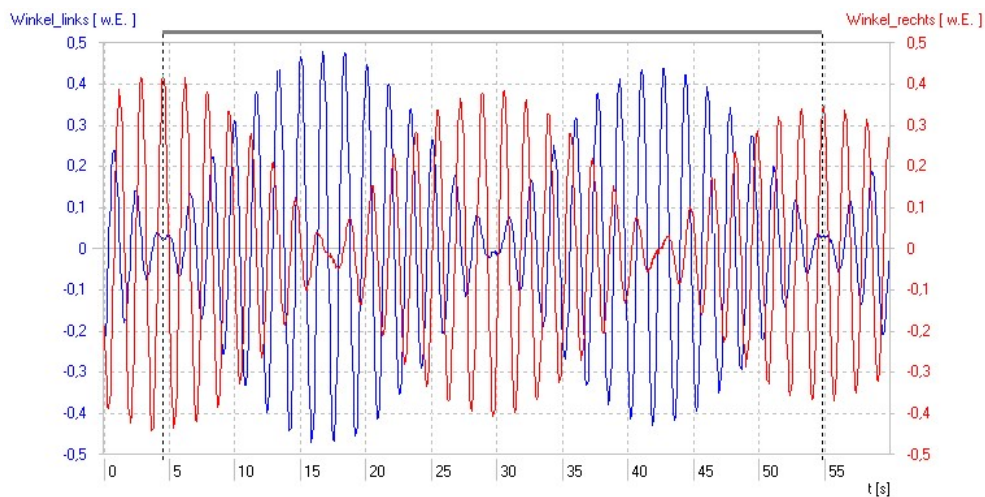


Fig. 5: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée avec battement maximum (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

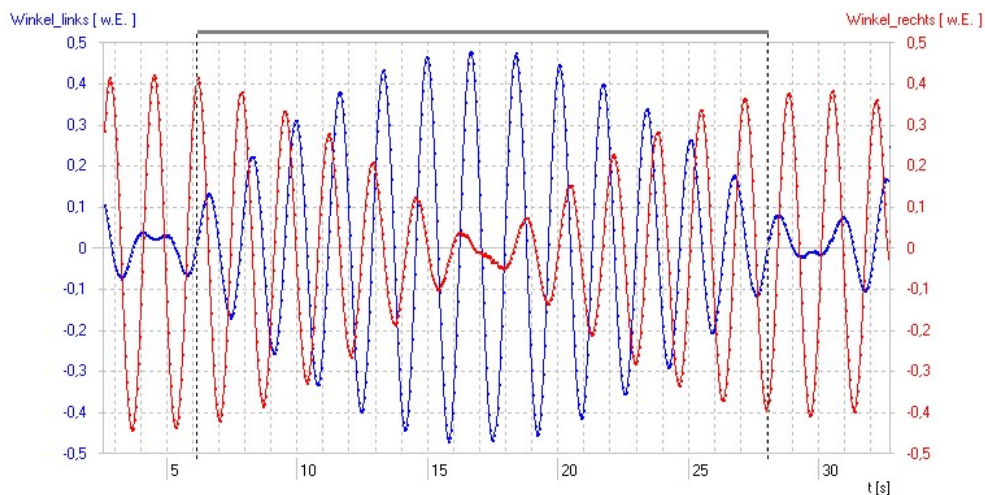


Fig. 6: Représentation agrandie d'une période de battement de l'oscillation couplée avec battement maximum (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

## EVALUATION

### 1. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée équiphase

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation équiphase.
- Entourer sur le diagramme le plus grand nombre de périodes d'oscillations d'un pendule au moyen de curseurs ; ce faisant, placer exactement chacun des deux curseurs sur le passage au point zéro d'un flanc montant pour permettre l'inclusion d'un nombre important de périodes (cf. Fig. 3).
- Lire l'intervalle de temps des curseurs (Fig. 3, encadré rouge).

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

### 2. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée en opposition de phase

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation en opposition de phase et procéder de la même façon.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

### 3. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée avec battement maximum

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation avec battement maximum.
- Entourer une ou, si possible, plusieurs périodes d'oscillation à l'aide des curseurs (cf. Fig. 5) et lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période de battement incluses donne la période de battement

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Modifier la graduation de la base de temps de manière à agrandir la représentation d'une période de battement.
- A l'aide des curseurs, entourer sur le diagramme le plus grand nombre possible de périodes d'oscillation d'un pendule à l'intérieur d'une période de battement (temps s'écoulant entre deux immobilisations du pendule en position de repos) (cf. Fig. 6) et lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T = 1,685 \text{ s}$$

### 4. Comparaison de la période de battement et de la période d'oscillation avec les valeurs calculées à partir des périodes d'oscillation propre

Pour la période d'oscillation  $T$  de l'oscillation couplée avec battement maximum, on obtient à partir de l'équation (8) :

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Cette valeur peut être comparée avec la valeur de mesure  $T = 1,685 \text{ s}$ .

Le calcul de la période de battement  $T_{\Delta}$  s'effectue de la même manière. Il faut toutefois tenir compte du fait que celle-ci est généralement définie comme le temps s'écoulant entre deux immobilisations d'un pendule en position de repos. Cela correspond à la moitié de la durée de période du terme cosinus de modulation ou du terme sinus de l'équation (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Cette valeur peut être comparée avec la valeur de mesure  $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$ .

L'écart d'environ une seconde par rapport à la valeur de mesure peut paraître de prime abord important. Il est cependant dû à la différence entre les périodes d'oscillation propre dont il dépend sensiblement. Une variation de quatre millisecondes qui se situe à peu près dans la plage de précision de mesure maximum atteignable dans le cadre de cette expérience pour les périodes d'oscillation propre, suffit déjà à provoquer une modification de la période de battement d'une seconde.

### 5. Détermination des constantes de rappel des ressorts de couplage.

La constante de rappel du ressort de couplage  $D$  est fonction de la constante de couplage  $k$  suivant l'équation

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

( $d$  : Intervalle entre le point de fixation du ressort de couplage et la suspension du pendule).

Pour un couplage faible ( $k \ll g$ ), la constante de rappel n'a que peu d'influence sur la période d'oscillation de l'oscillation en opposition de phase mais, par contre, une grande influence sur la période de battement. Pour calculer la constante de rappel, il est donc recommandé d'établir une relation avec la période de battement, relation que l'on obtient en intégrant l'équation (4) dans l'équation (8) pour obtenir l'inconnue  $k$  dans l'équation ci-dessous.

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

On exprime à présent les pulsations par les périodes d'oscillation et on les intègre dans l'équation (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$

## Oscillazioni accoppiate

### REGISTRAZIONE E ANALISI DELLE OSCILLAZIONI DI DUE PENDOLI UGUALI ACCOPPIATI.

- Registrazione dell'oscillazione in fase e determinazione del suo periodo di oscillazione  $T_+$ .
- Registrazione dell'oscillazione in opposizione fase e determinazione del suo periodo di oscillazione  $T_-$ .
- Registrazione di un'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima e determinazione del suo periodo di oscillazione  $T$  come pure del periodo di fluttuazione  $T_\Delta$ .
- Confronto dei periodi di fluttuazione e oscillazione misurati con i valori calcolati dai periodi di oscillazione propria  $T_+$  e  $T_-$ .
- Determinazione degli indici di rigidità della molla di accoppiamento.

UE1050600

01/24 CW/UD

### BASI GENERALI

Con l'oscillazione di due pendoli accoppiati, l'energia di oscillazione tra due pendoli viene trasferita alternatamente. Se entrambi i pendoli sono uguali e se le loro oscillazioni vengono generate in modo che all'inizio un pendolo si trovi in posizione di riposo, mentre l'altro oscilla con la massima deviazione, il trasferimento di energia avviene addirittura completamente. Ciò significa che un pendolo si arresta completamente, mentre l'altro oscilla con la massima ampiezza. Il tempo tra due arresti di un pendolo o, più in generale, tra due momenti in cui il pendolo oscilla con l'ampiezza minima viene definito come periodo di fluttuazione  $T_\Delta$ .

Le oscillazioni di due pendoli uguali accoppiati matematicamente può essere descritta come sovrapposizione di due oscillazioni proprie. Queste oscillazioni proprie sono osservabili se i due pendoli vengono sollecitati ad eseguire oscillazioni in fase o in opposizione di fase. Nel

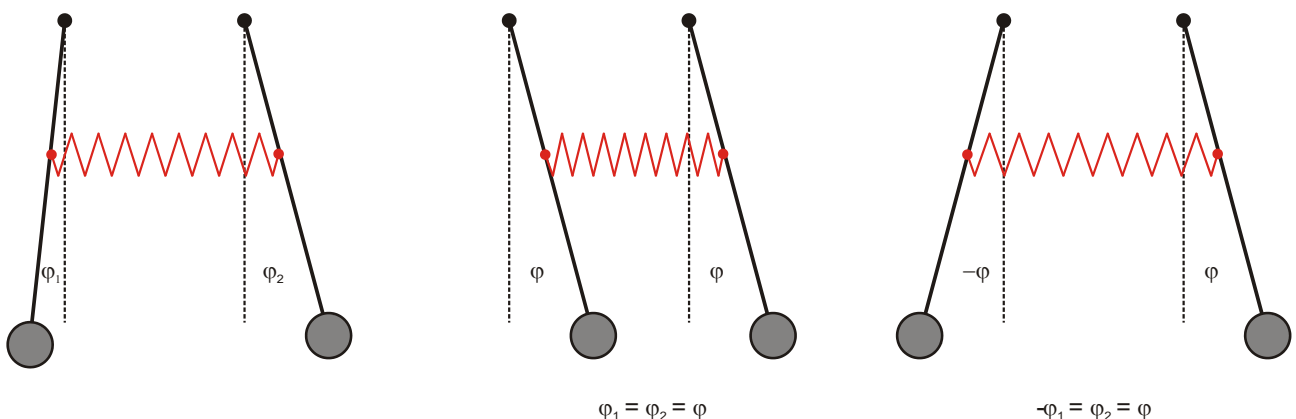
primo caso, i pendoli oscillano senza influire sull'accoppiamento alla frequenza dei pendoli non accoppiati, mentre nel secondo caso oscillano esercitando la massima influenza sull'accoppiamento alla massima frequenza propria. Tutte le altre oscillazioni possono essere rappresentate come sovrapposizioni di queste due oscillazioni proprie.

Le equazioni del moto dei pendoli (per angoli di deviazione  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  ridotti) hanno la forma:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$g$ : accelerazione di caduta,  $L$ : lunghezza del pendolo,  $k$ : costante di accoppiamento

Fig. 1: A sinistra: oscillazione generale accoppiata, al centro: oscillazione in fase accoppiata, a destra: oscillazione in opposizione di fase accoppiata



Per le grandezze ausiliarie (inizialmente introdotte volontariamente)  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  e  $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$  si ottengono quindi le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

le cui soluzioni

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \quad (3)$$

con le frequenze di circuito

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{und} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \quad (4)$$

corrispondono alle oscillazioni proprie descritte per l'eccitazione in fase o in opposizione di fase (ossia  $\varphi_+ = 0$  per l'oscillazione in opposizione di fase e  $\varphi_- = 0$  per l'oscillazione in fase).

Le deviazioni dei pendoli possono essere calcolate sulla base della somma o della differenza delle due grandezze ausiliarie e si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (5)$$

A questo proposito, i parametri  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$  e  $b_-$  sono inizialmente grandezze a piacere che possono essere calcolate sulla base dello stato di oscillazione dei due pendoli al momento  $t = 0$ .

Più facile da interpretare è il seguente caso che viene generato quando il pendolo 1 al momento 0 dalla posizione di origine viene deviato e rilasciato con l'angolo  $\varphi_0$ , mentre il pendolo 2 è a riposo nella posizione di origine.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (6)$$

Dopo la conversione matematica si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Questo corrisponde ad un'oscillazione dei due pendoli alla stessa frequenza di circuito  $\omega$ , in cui le ampiezze vengono modulate con la frequenza di circuito  $\omega_\Delta$ . Una tale modulazione è definita fluttuazione. In questo caso si può parlare persino di fluttuazione massima, perché il valore minimo raggiunto dall'ampiezza è zero.

## ELENCO DEGLI STRUMENTI

2 Pendoli ad asta con rivelatore d'angolo @230 V	1000763 (U8404275-230)
0	
2 Pendoli ad asta con rivelatore d'angolo @115 V	1000762 (U8404275-115)
1 Molla ad elica 3,9 N/m	1002945 (U15027)
2 Morsetti da tavolo	1002832 (U1326)
2 Aste di supporto 1000 mm	1002936 (U15004)
1 Asta di supporto 470 mm	1002934 (U15002)
4 Manicotti universali	1002830 (U13255)
2 Adattatori connettore BNC / jack 4 mm	1002750 (U11259)
2 Sensori di tensione 10 V	1021682 (UCMA-BT02)
1 Data logger	
1 Software	

Ulteriori informazioni sulla misurazione digitale sono disponibili sul sito web del prodotto, nel webshop 3B.

## MONTAGGIO

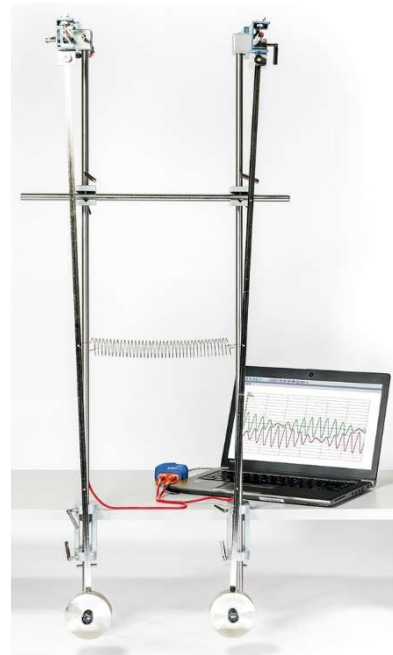


Fig. 2: Struttura di registrazione e analisi delle oscillazioni di due pendoli uguali accoppiati

La struttura è rappresentata nella fig. 2.

- Fissare le aste di supporto da 1000 mm al tavolo di lavoro a circa 15 cm di distanza l'una dall'altra mediante i morsetti da tavolo.
- Applicare l'asta di supporto corta orizzontalmente per conferire maggiore stabilità alla struttura.
- Fissare i rivelatori d'angolo con i manicotti universali alle estremità superiori delle aste di supporto verticali.
- Bloccare i pesi dei pendoli all'estremità inferiore delle aste.

- Agganciare le aste dei pendoli ai rivelatori d'angolo (gli aghi della sospensione dei pendoli devono inserirsi negli incavi delle aste del rivelatore d'angolo).
- Agganciare la molla ad elica ai fori delle aste dei pendoli, distanti circa 40 cm dalla sospensione.
- Collegare gli adattatori connettore BNC / jack 4 mm ai rivelatori d'angolo e collegare i sensori di tensione.
- Collegare i sensori di tensione al data logger.
- Collegare i due rivelatori d'angolo alla rete elettrica utilizzando gli alimentatori a spina.

**ESECUZIONE**

- Avviare il software e registrare le curve temporali dei segnali di tensione di entrambi i sensori.
- 1. Registrazione dell'oscillazione in fase**
    - Spostare i due pendoli con la stessa angolazione (ridotta) e nella stessa direzione e rilasciarli contemporaneamente.
  - 2. Registrazione dell'oscillazione in opposizione di fase**
    - Spostare i due pendoli con la stessa angolazione (ridotta) e nella direzione opposta e rilasciarli contemporaneamente.
  - 3. Registrazione di un'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima**
    - Se necessario, aumentare il numero di valori misurati.
    - Spostare l'asta di un pendolo tenendo l'altra nella posizione di origine e rilasciarle contemporaneamente.

**ESEMPIO DI MISURAZIONE**

**1. Oscillazione in fase accoppiata**

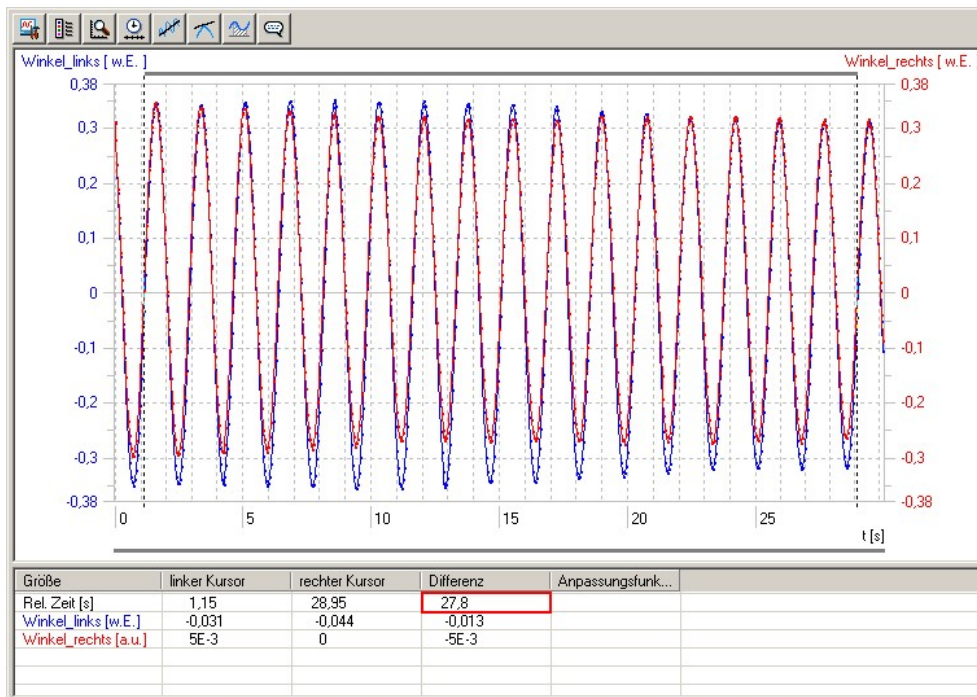


Fig. 3: Diagramma deviazione-tempo dell'oscillazione in fase accoppiata (blu: pendolo sinistro, rosso: pendolo destro). La scala angolare non è calibrata

## 2. Oscillazione in opposizione di fase accoppiata

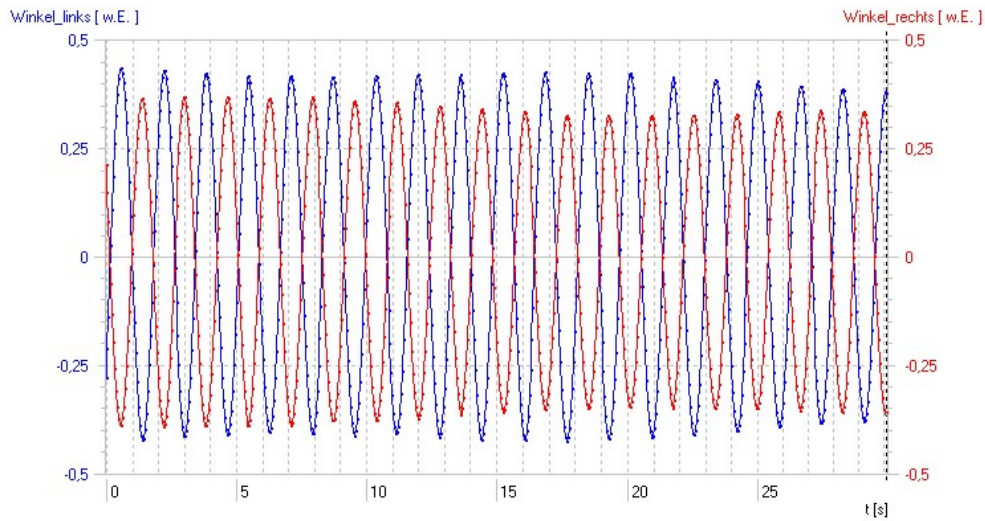


Fig. 4: Diagramma deviazione-tempo dell'oscillazione in opposizione di fase accoppiata (blu: pendolo sinistro, rosso: pendolo destro). La scala angolare non è calibrata

## 3. Oscillazione accoppiata con fluttuazione massima

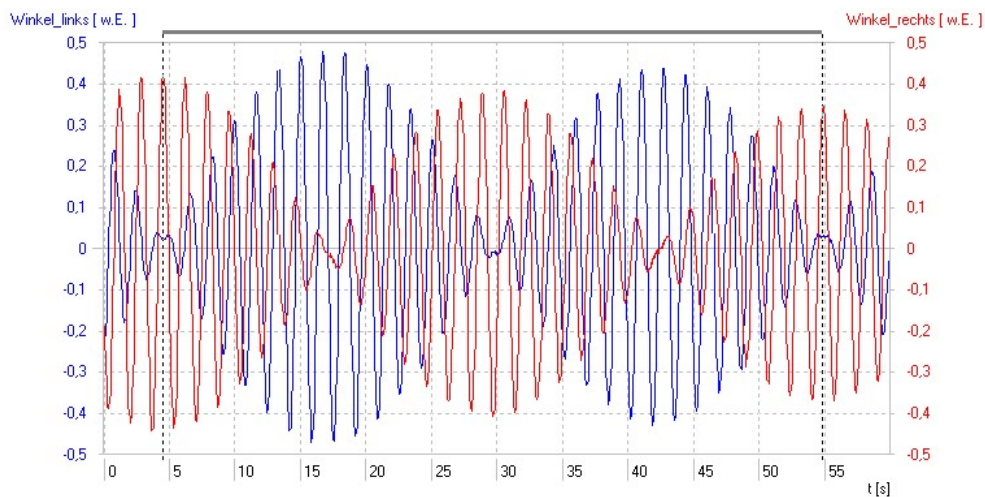


Fig. 5: Diagramma deviazione-tempo dell'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima (blu: pendolo sinistro, rosso: pendolo destro). La scala angolare non è calibrata

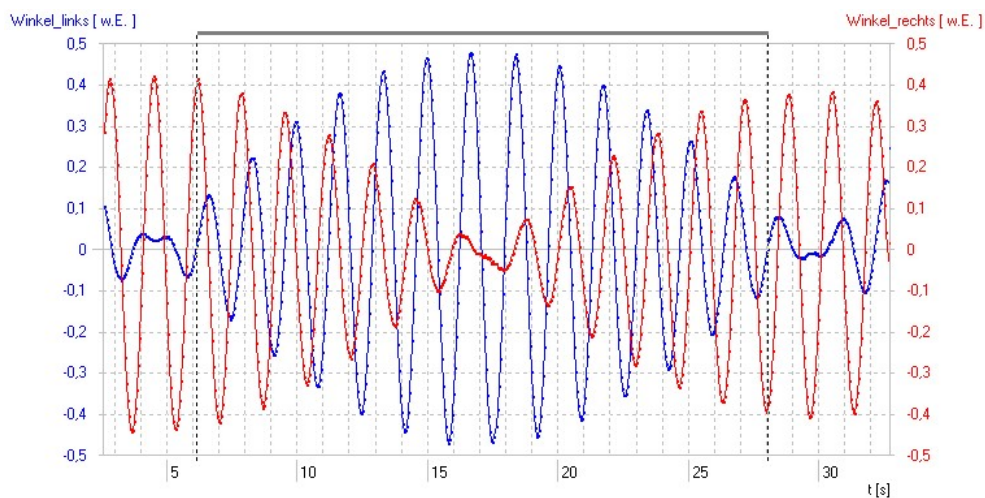


Fig. 6: Rappresentazione ingrandita di un periodo di fluttuazione dell'oscillazione accoppiata con fluttuazione massima (blu: pendolo sinistro, rosso: pendolo destro). La scala angolare non è calibrata



## ANALISI

### 1. Determinazione del periodo di oscillazione in fase accoppiata

- Aprire il record dell'oscillazione in fase.
- Con il cursore inserire nel diagramma il maggior numero di periodi di oscillazione di un pendolo, impostando entrambi i cursori esattamente sul passaggio attraverso zero di un fronte di salita, in modo da includere una serie intera di periodi (cfr. fig. 3).
- Leggere la distanza temporale del cursore (fig. 3, casella rossa).

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi inclusi fornisce il periodo di oscillazione

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

### 2. Determinazione del periodo di oscillazione in opposizione di fase accoppiata

- Aprire il record dell'oscillazione in opposizione di fase e procedere allo stesso modo.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi inclusi fornisce il periodo di oscillazione

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

### 3. Determinazione del periodo di oscillazione accoppiata con fluttuazione massima

- Aprire il record dell'oscillazione con fluttuazione massima.
- Con il cursore inserire uno o, se possibile, più periodi di fluttuazione (cfr. fig. 5) e leggere la distanza temporale del cursore.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi di fluttuazione inclusi fornisce il periodo di fluttuazione

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Modificare la scala dell'asse temporale in modo da visualizzare un periodo di fluttuazione ingrandito.
- Con il cursore, includere nel diagramma il maggior numero di periodi di oscillazione di un pendolo all'interno di un periodo di fluttuazione (tempo tra due arresti del pendolo in posizione di riposo) (cfr. fig. 6) e leggere la distanza temporale del cursore.

Il quoziente risultante dalla distanza temporale del cursore e dal numero dei periodi inclusi fornisce il periodo di oscillazione

$$T = 1,685 \text{ s}$$

### 4. Confronto dei periodi di fluttuazione e oscillazione misurati con i valori calcolati dai periodi di oscillazione propria

Da (8), per il periodo  $T$  di oscillazione accoppiata con fluttuazione massima deriva che:

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Questo valore deve essere confrontato con il valore misurato  $T = 1,685 \text{ s}$ .

Il periodo di fluttuazione  $T_{\Delta}$  viene calcolato allo stesso modo. Tuttavia occorre osservare che questo periodo viene solitamente definito come tempo tra due arresti di un pendolo in posizione di riposo. Ciò corrisponde alla metà della durata del periodo del termine modulante coseno e seno in (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Questo valore deve essere confrontato con il valore misurato  $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$ .

La deviazione di circa un secondo dal valore misurato potrebbe apparire rilevante a prima vista, ma è invece dovuta al sensibile rapporto tra la differenza dei periodi di oscillazione propria. Persino una variazione di quattro millisecondi, che rientra circa nella tolleranza della precisione di misura massima raggiungibile in questo esperimento per il periodo di oscillazione propria, risulta come una variazione di un secondo del periodo di fluttuazione.

### 5. Determinazione degli indici di rigidità della molla di accoppiamento.

L'indice di rigidità  $D$  della molla di accoppiamento varia in funzione della costante di accoppiamento  $k$  come indicato di seguito

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

( $d$ : distanza del punto di fissaggio della molla di accoppiamento dalla sospensione del pendolo).

In caso di accoppiamento debole ( $k \ll g$ ), l'indice di rigidità influisce solo in minima parte sul periodo dell'oscillazione in fase, ma caratterizza fortemente il periodo di fluttuazione. Pertanto, per determinare l'indice di rigidità occorre metterlo in rapporto con il periodo di fluttuazione, che si ottiene inserendo (4) in (8) e convertendolo in  $k$ .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

A questo punto si formulano le frequenze di circuito attraverso i periodi di fluttuazione e li si inserisce in (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$

## Oscilações acopladas

### REGISTRO E ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES DE DOIS PÊNDULOS IDÊNTICOS E ACOPLADOS.

- Registro da oscilação em fase e determinação da sua duração de oscilação  $T_+$ .
- Registro da oscilação afásica e determinação da sua duração de oscilação  $T_-$ .
- Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima e determinação do seu período  $T$  assim como da duração de flutuação  $T_\Delta$ .
- Comparação das durações medidas de flutuação e de período com os valores calculados a partir do período próprio  $T_-$  e  $T_+$ .
- Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas.

UE1050600

01/24 CW/DU

### ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Durante a oscilação de dois pêndulos acoplados, a energia de oscilação é transferida entre os ambos pêndulos de um lado para o outro. Se os pêndulos são idênticos e a sua oscilação é iniciada de modo que um dos pêndulos se encontre em posição de repouso enquanto o outro se encontra na posição de máxima amplitude, então, a transferência de energia é completa. Ou seja, a cada vez um dos pêndulos chega à posição de repouso total, enquanto que o outro oscila na sua amplitude máxima. O tempo transcorrido entre dois pontos de repouso de um dos pêndulos, ou em geral entre dois momentos nos quais o pêndulo oscila com a mínima amplitude, é chamado  $T_\Delta$ .

As oscilações de dois pêndulos matemáticos idênticos e acoplados podem ser descritas como a superposição de duas oscilações próprias. Estas oscilações próprias podem ser observadas quando os pêndulos são levados

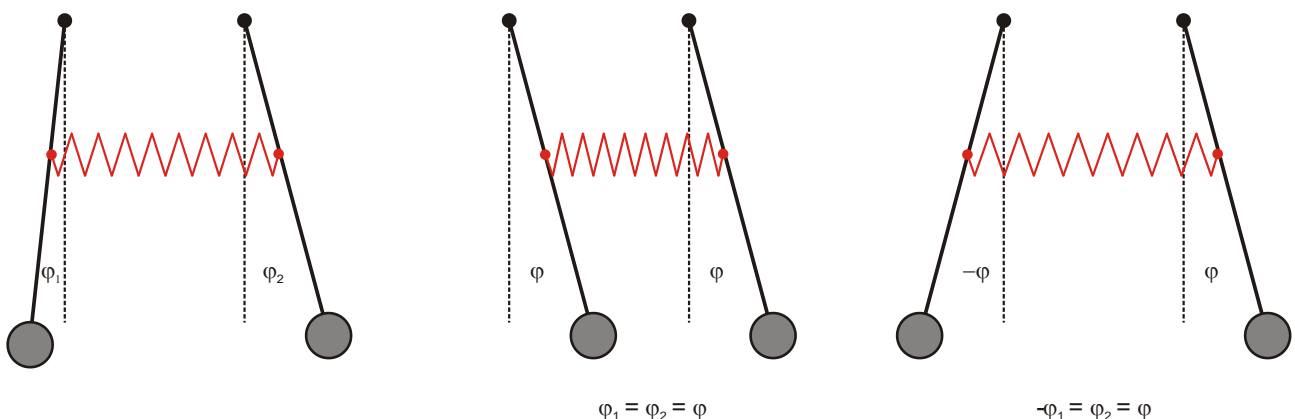
a oscilar em fase ou de modo afásico. No primeiro caso os pêndulos oscilam sem influência do acoplamento com a frequência do pêndulo não acoplado, no segundo caso, eles oscilam com a influência máxima do acoplamento com uma frequência própria maior. Todas as outras oscilações podem ser representadas como sobreposições destas duas oscilações.

A equação de movimento dos pêndulos (para pequenos ângulos de amplitude  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ) tem a forma:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$g$ : aceleração da gravidade,  $L$ : comprimento do pêndulo,  $k$ : constante de acoplamento.

Fig. 1: Esquerda: oscilação acoplada em geral, meio: oscilação acoplada em fase, direita: oscilação acoplada afásica



Para as grandezas auxiliares (primeiro introduzidas de forma aleatória)  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  e  $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$  resultam então as equações de movimento:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Cujas soluções

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \quad (3)$$

Com as frequências circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{e} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \quad (4)$$

correspondentes às oscilações próprias descritas com excitação em fase ou afásica (é válido  $\varphi_+ = 0$  no caso da oscilação afásica e  $\varphi_- = 0$  no caso da oscilação em fase).

Os balanços do pêndulo podem ser calculados a partir da soma ou da diferença das duas grandezas auxiliares, e assim obtém-se a solução

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (5)$$

Sendo que aqui, os parâmetros  $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$  e  $b_-$  são primeiramente grandezas aleatórias que podem ser calculadas a partir do estado de oscilação de ambos pêndulos no momento  $t = 0$ .

O caso a seguir é o mais fácil de se descrever, o qual é provocado quando o pêndulo 1 no momento 0 é deslocado do ponto zero num ângulo de amplitude  $\varphi_0$  e logo largado, enquanto o pêndulo 2 se encontra em repouso no ponto zero.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (6)$$

Após uma reformulação matemática obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

com

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Isto corresponde à oscilação de ambos pêndulos com a mesma frequência circular  $\omega$ , sendo que as suas amplitudes são moduladas com a frequência circular  $\omega_\Delta$ . Uma tal modulação é chamada de flutuação. No caso presente, pode-se até falar de flutuação máxima, porque a amplitude atinge como valor mínimo o zero.

## LISTA DE APARELHOS

- 2 Pêndulos de vara com registrador de ângulo @230 V 1000763 (U8404275-230)
  - ou
  - 2 Pêndulos de vara com registrador de ângulo @115 V 1000762 (U8404275-115)
  - 1 Mola helicoidal 3,9 N/m 1002945 (U15027)
  - 2 Fixadores de mesa 1002832 (U1326)
  - 2 Varas de apoio, 1000 mm 1002936 (U15004)
  - 1 Vara de apoio, 470 mm 1002934 (U15002)
  - 4 Mangas universais 1002830 (U13255)
  - 2 Adaptadores com plugue BNC/tomadas de 4 mm 1002750 (U11259)
  - 2 Sensores de voltagem 10 V 1021682 (UCMA-BT02)
  - 1 Data logger
  - 1 Software
- Mais informações sobre a medição digital podem ser encontradas no site do produto na loja virtual da 3B.

## MONTAGEM

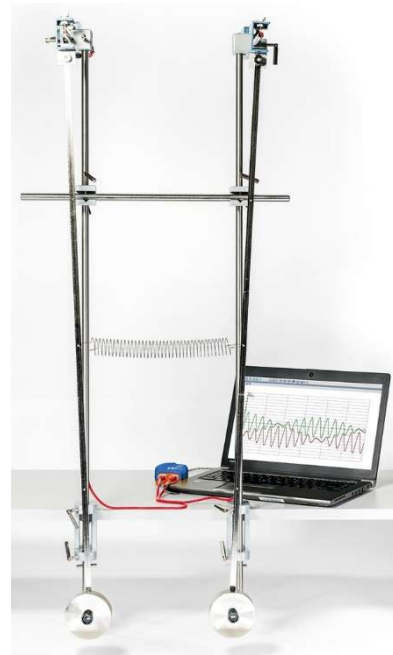


Fig. 2: Montagem para o registro e a análise das oscilações de dois pêndulos idênticos acoplados

A montagem está representada na fig. 2.

- Fixar as varas de apoio de 1000 mm de comprimento na mesa, a distâncias de aproximadamente 15 cm umas das outras, por meio das pinças de mesa.
- Instalar a vara de apoio curta na horizontal para proporcionar mais estabilidade à montagem.
- Fixar o registrador de ângulo por meio da manga universal na extremidade superior da vara de apoio vertical.

- Fixar as massas pendulares nas extremidades inferiores das varas dos pêndulos.
- Pendurar as varas de pêndulos no registrador de ângulo (para as pontas das varas de pêndulo foram previstos entalhos nas varas do registrador de ângulo).
- Pendurar a mola parafuso nos orifícios que se encontram nas varas dos pêndulos, os quais se encontram a uma distância de aproximadamente 40 cm do ponto de pendurar.
- Conectar os adaptadores com plugue BNC/tomadas de 4 mm nos registradores de ângulo e conectar os sensores de voltagem.
- Conectar os sensores de voltagem ao data logger.
- Conectar ambos registradores de ângulo à rede elétrica usando as fontes de alimentação.

## EXECUÇÃO

- Iniciar o software e registrar as curvas de tempo dos sinais de tensão de ambos os sensores.
- 1. Registro da oscilação de fase idêntica**
    - Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude na mesma direção e solta-los simultaneamente.
  - 2. Registro da oscilação em contra fase**
    - Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude em direções contrárias e solta-los simultaneamente.
  - 3. Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima**
    - Se necessário, aumente o número de valores medidos.
    - Deslocar uma das varas de pêndulo, segurando a outra no ponto zero e soltar ambas simultaneamente.

## EXEMPLOS DE MEDIÇÃO

### 1. Oscilações em fase acopladas

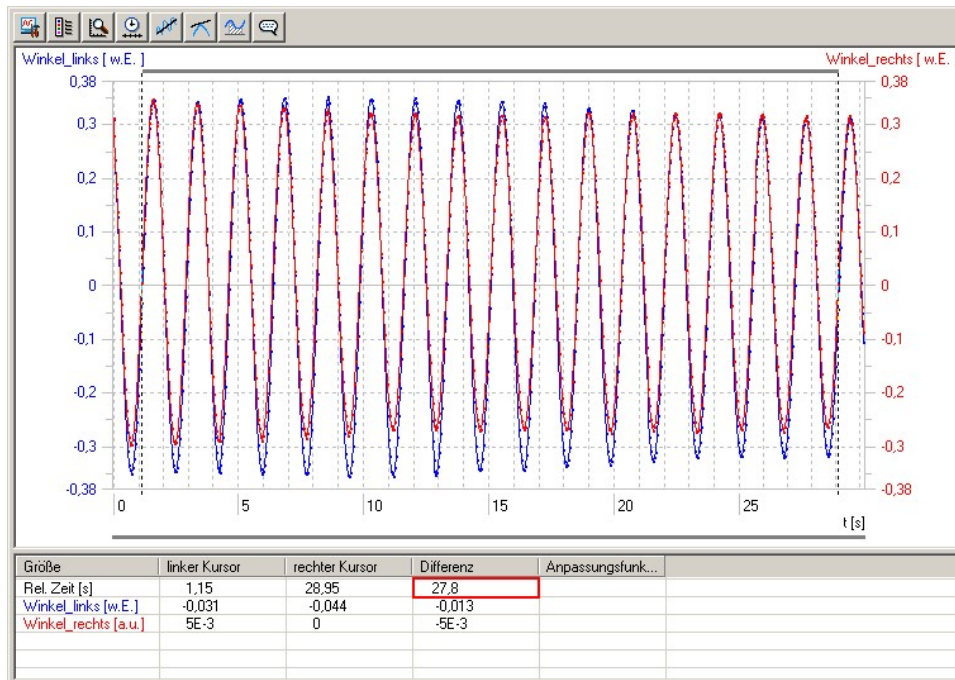


Fig. 3: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em fase (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

## 2. Oscilação acoplada em contra fase

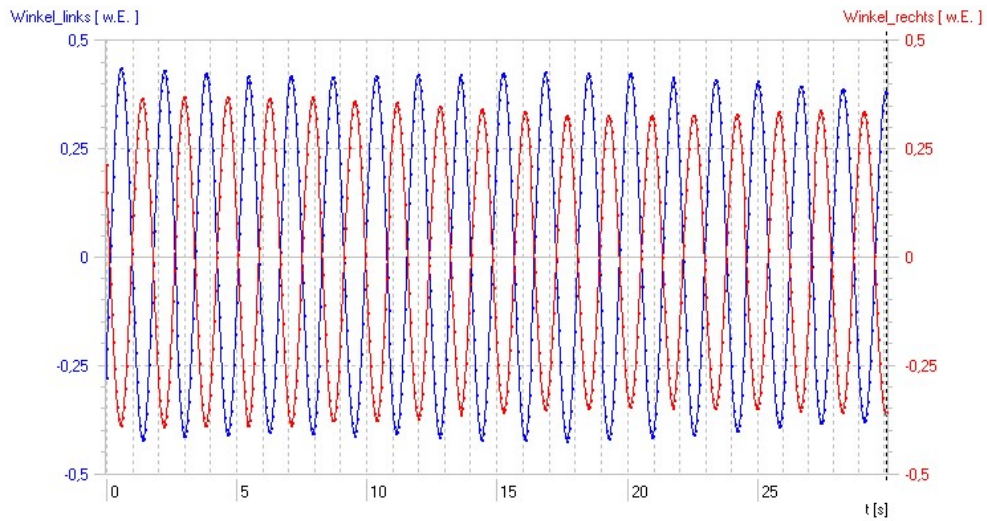


Fig. 4: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em contra fase (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

## 3. Oscilação acoplada com flutuação máxima

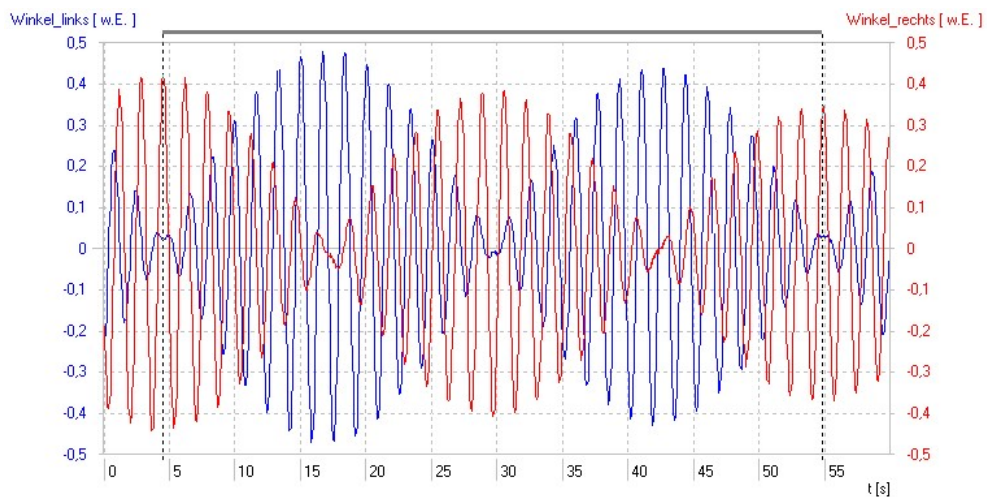


Fig. 5: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada de flutuação máxima (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

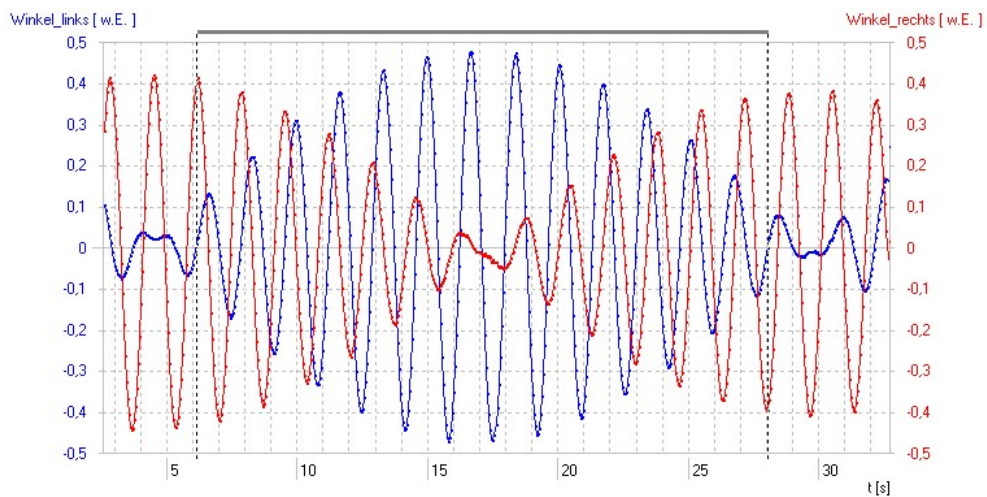


Fig. 6: Representação ampliada de um período de flutuação da oscilação acoplada com flutuação máxima (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

## ANÁLISE

### 1. Determinação do período de uma oscilação acoplada em fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em fase.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo no diagrama, para tal, levar cada um de ambos cursores exatamente sobre a passagem a zero de um flanco ascendente, de modo que um número inteiro de períodos seja incluído (comparar Fig. 3).
- Ler o intervalo de tempo dos cursores (fig. 3, quadro vermelho).

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

### 2. Determinação do período de uma oscilação acoplada em contra fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em contra fase e proceder do mesmo modo.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

### 3. Determinação do período de uma oscilação acoplada com flutuação máxima

- Abrir o jogo de dados da oscilação com flutuação máxima.
- Incluir com o cursor um, ou se possível, vários períodos de oscilação (comparar fig. 5) e ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos de flutuação incluídos resulta na duração do período de flutuação

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Alterar a escala do eixo de tempo de modo que um período de flutuação seja representado de forma ampliada.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo dentro um período de flutuação (intervalo de tempo entre duas paradas do pendulo na posição de repouso) (comparar fig. 6) e ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T = 1,685 \text{ s}$$

### 4. Comparação dos períodos de flutuação e de oscilação com os valores calculados a partir do período de oscilação próprio

Para o período  $T$  da oscilação acoplada com flutuação máxima resulta de (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Este valor deve ser comparado com o valor medido  $T = 1,685 \text{ s}$ .

De modo semelhante calcula-se o período de flutuação  $T_{\Delta}$ . No entanto, deve-se levar em conta que este normalmente é definido como o tempo transcorrido entre dois momentos imóveis do pêndulo na posição de repouso. Isto corresponde à metade da duração do período do termo de co-seno ou seno modulador em (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Este valor deve ser comparado com o valor medido  $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$ .

O desvio de aproximadamente um segundo do valor medido pode parecer grosseiro a primeira vista, este reside porém, na dependência delicada da diferença dos períodos próprios. Mesmo um desvio de uns quatro milissegundos, o que se situa no quadro da precisão de medição máxima para o período próprio possível nesta experiência, já implica uma alteração do período da flutuação de um segundo.

### 5. Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas

A constante de elasticidade das molas acopladas  $D$  depende da constante de acoplamento  $k$  da seguinte maneira:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

( $d$ : distância entre a fixação das molas acopladas e o ponto onde está pendurado o pêndulo).

No caso de acoplamento fraco ( $k \ll g$ ), a constante de elasticidade só tem uma influência limitada sobre o período da oscilação em contra fase, mas tem grande influência no período de flutuação. Por isso deve-se utilizar uma relação ao período de flutuação para se determinar a constante de elasticidade, a qual é obtida quando se aplica (4) em (8) e logo se a transforma para  $k$ .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

Agora expressam-se as frequências circulares através de períodos de oscilação e se as aplica em (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$